

Subiectul I Test grilă, complement simplu (3p x 10 itemi=30 puncte)

Barem grilă

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	c	c	b	d	c	a	b	a	c

Subiectul II Probleme (30 puncte)

Problema 1 Rachetă și satelit (10 puncte)

O rachetă a cărei masă este M se mișcă uniform pe o orbită circulară de rază $1,25R$ în jurul Pământului (unde R este raza Pământului).

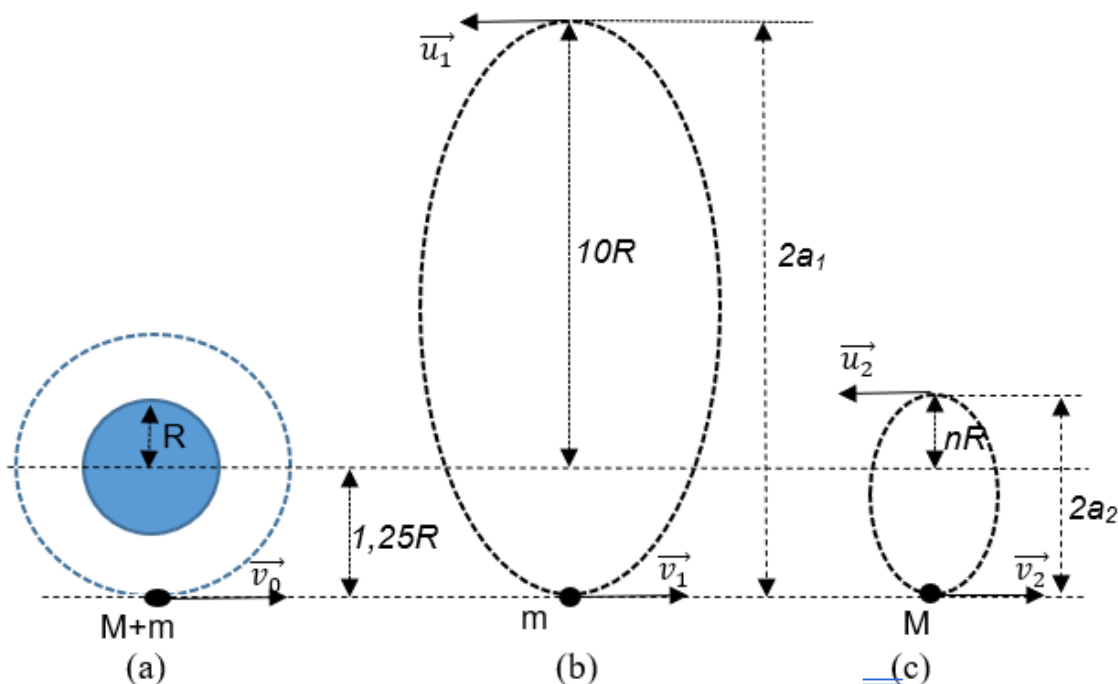
Un satelit de masă m , aflat inițial pe rachetă, se desprinde de aceasta, fiind catapultat pe direcția și în sensul mișcării rachetei, continuându-și apoi mișcarea pe o orbită eliptică cu apogeul la distanța $10R$ față de centrul Pământului.

Pentru ce valori ale raportului $\frac{m}{M}$ satelitul întâlnește racheta după o rotație completă a satelitului în jurul Pământului?

Barem

Desen: vom reprezenta traiectoriile ansamblului rachetă-satelit înaintea desprinderii (a) și traiectoriile fiecărui corp, după desprindere (b și c).

1p



Notății:

- v_0 – viteza ansamblului rachetă-satelit înainte de desprinderea acestuia;
- v_1 și v_2 – vitezele satelitelui, respectiv ale rachetei imediat după desprindere;
- u_1 și u_2 – vitezele satelitelui, respectiv ale rachetei la apogeu ($10R$, respectiv nR , unde n este număr real);
- T_1 și T_2 – perioadele mișcărilor satelitelui, respectiv ale rachetei după desprindere.

Pentru ca problema să aibă soluții trebuie îndeplinite două condiții:

1. Raportul perioadelor de rotație ale celor două corpuri să fie un număr întreg supraunitar:

$$\frac{T_1}{T_2} = k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k > 1 \quad (1) \quad 0,25p$$

2. Racheta purtătoare să nu cadă pe Pământ după desprinderea satelitelui:

$$n > 1 \quad (2) \quad 0,25p$$

Pentru a exprima raportul celor două perioade vom folosi legea a III-a a lui Kepler:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \quad (3) \quad 0,5p$$

unde a_1 și a_2 sunt semiaxele mari ale traiectoriilor eliptice ale celor două corpuri după separare.

Din desen se vede că:

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{5R}{4} + 10R \right) = \frac{45R}{8} \quad (4) \quad 0,5p$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{5R}{4} + nR \right) = \frac{5 + 4n}{8} R \quad (5)$$

Procesul de desprindere a satelitelui de rachetă respectă legea de conservare a impulsului sistemului între momentele imediat înainte și imediat după desprindere, care în formă scalară se scrie:

$$(M + m)v_0 = mv_1 + Mv_2 \quad (6) \quad 0,5p$$

Pentru determinarea vitezei v_0 a ansamblului înainte de separare, folosim condiția de echilibru a orbitei, în sistemul de referință propriu (fig. a):

$$F_{\text{centrifugă}} = F_{\text{(corpuri-Pământ)}^{\text{atractive}}}$$

$$\frac{(m + M)v_0^2}{\frac{5R}{4}} = K \frac{(m + M)M_{\text{Pământ}}}{\left(\frac{5R}{4}\right)^2}$$

$$v_0 = 2\sqrt{\frac{g_0 R}{5}} \quad (7) \quad 0,5p$$

unde:

$$g_0 = K \frac{M_{\text{Pământ}}}{R^2} \quad (8)$$

este accelerația gravitațională la suprafața Pământului.

Determinarea vitezelor v_1 și v_2 se va face folosind legile de conservare a energiei și a momentului cinetic pentru fiecare corp, între momentul desprinderii și momentul când acestea se află la apogeu.

Energia totală a sistemului corp (aflat la distanța r față de centrul Pământului)–Pământ este:

$$W = \frac{mv^2}{2} - K \frac{mM_{\text{Pământ}}}{r} = \frac{mv^2}{2} - g_0 \frac{mR^2}{r} \quad (9) \quad 0,5p$$

Iar momentul cinetic al corpului față de centrul Pământului este:

$$L = mvr \quad (10)$$

Conservarea energiei pentru sistemul satelit–Pământ:

$$\frac{mv_1^2}{2} - g_0 \frac{mR^2}{\frac{5R}{4}} = \frac{mu_1^2}{2} - g_0 \frac{mR^2}{10R} \quad (11) \quad 0,25p$$

Conservarea energiei pentru sistemul rachetă–Pământ:

$$\frac{Mv_2^2}{2} - g_0 \frac{MR^2}{\frac{5R}{4}} = \frac{Mu_2^2}{2} - g_0 \frac{MR^2}{nR} \quad (12) \quad 0,25p$$

Conservarea momentului cinetic al satelitului:

$$mv_1 \cdot \frac{5R}{4} = mu_1 \cdot 10R \quad (13)$$

Conservarea momentului cinetic al rachetei:

$$Mv_2 \cdot \frac{5R}{4} = Mu_2 \cdot nR \quad (14)$$

Din (13) și (14) se obțin:

$$u_1 = \frac{v_1}{8} \quad (15) \quad 0,5p$$

$$u_2 = \frac{5v_2}{4n} \quad (16) \quad 0,5p$$

Înlocuind (15) în (11) și folosind (7), se obține:

$$v_1 = \frac{4v_0}{3} \quad (17) \quad 0,25p$$

Înlocuind (16) în (12) și folosind (7), se obține:

$$v_2 = 2v_0 \sqrt{\frac{2n}{4n+5}} \quad (18) \quad 0,25p$$

Se înlocuiesc apoi vitezele din (17) și (18) în conservarea impulsului (6):

$$(m+M)v_0 = m \frac{4v_0}{3} + M \cdot 2v_0 \sqrt{\frac{2n}{4n+5}}$$

Prin prelucrare se obține:

$$\frac{2n}{4n+5} = \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{6M} \right)^2 \quad (19)$$

Notând:

$$x = \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{6M} \right)^2$$

se obține:

$$n = \frac{5x}{2(1-2x)} \quad (20) \quad 0,5p$$

Acum impunem una dintre condițiile problemei (2):

$$n > 1 \Rightarrow x > \frac{2}{9}$$

Înlocuind expresia lui x , determinăm că raportul celor două mase (pozitiv) trebuie să îndeplinească:

$$0 < \frac{m}{M} < 3 - 2\sqrt{2} \quad (21) \quad 0,5p$$

Pentru a ne lega de prima condiție (1), folosind (3), (4) și (5), determinăm că:

$$k = \left(\frac{45}{5+4n} \right)^{3/2}$$

și de aici:

$$n = \frac{5}{4} \left(\frac{9}{k^{2/3}} - 1 \right) \quad (22) \quad 1p$$

Înlocuind (22) în (19) se obține:

$$\frac{m}{M} = 3 - \sqrt{2(9 - k^{2/3})} \quad (23) \quad 0,5p$$

Folosind dubla inegalitate (21):

$$3 - \sqrt{2(9 - k^{2/3})} > 0$$

obținem:

$$k > 9,53 \quad (24) \quad 0,25p$$

respectiv:

$$3 - \sqrt{2(9 - k^{2/3})} < 3 - 2\sqrt{2}$$

obținem:

$$k < 11,2 \quad (25) \quad 0,25p$$

Deoarece k trebuie să fie număr întreg, el poate lua doar valorile:

$$k = 10 \text{ și } 11 \quad (26) \quad 0,5p$$

Rezultate finale, din (23):

• pentru $k = 10$:

$$\frac{m}{M} = 3 - \sqrt{2(9 - 10^{2/3})} \approx 0,05 \quad 0,25p$$

• pentru $k = 11$:

$$\frac{m}{M} = 3 - \sqrt{2(9 - 11^{2/3})} \approx 0,15 \quad 0,25p$$

Problema 2 Observații de stele (10 puncte)

A. Aceeași stea, aceeași înălțime

Teodor și Diana fac observații astronomice în locații diferite, aflate la aceeași latitudine, la același moment de timp (același Timp Universal). Amândoi observă steaua Antares la aceeași înălțime h . Știind că Teodor se află în emisfera vestică și Diana în emisfera estică, iar observațiile au loc în ziua echinocțiului de primăvară, ascensia dreaptă a stelei Antares este $\alpha = 16^h 30^m$ și timpul local la Greenwich este $T_G = 18^h 18^m$:

- [2 p] Determinați o relație între unghiurile orare ale stelei Antares observate de cei doi: $H_{Teodor} = H_1$ și $H_{Diana} = H_2$.
- [2 p] Determinați o relație generală între timpul legal al locului, timpul local la Greenwich și fusul orar în ziua echinocțiului de primăvară. Neglijați ecuația timpului.
- [2 p] Știind că Teodor se află la longitudinea $\lambda_1 = 60^\circ$ V, determinați longitudinea λ_2 a Dianei.

B. Stele diferite, același azimut

Matei observă în același moment de timp două stele S_1 și S_2 care au același azimut A , măsurat din sud spre vest. Prima stea are înălțimea $h_1 = 30^\circ$ și declinația $\delta_1 = 10^\circ$, iar a doua are înălțimea $h_2 = 60^\circ$ și declinația $\delta_2 = 40^\circ$. Se neglijează refracția atmosferică. Se cunoaște faptul că $\varphi \neq 90^\circ$.

- [2 p] Exprimați trigonometric A în funcție de φ , h_1 și δ_1 .
- [2 p] Determinați latitudinea φ a locului de observație.

Barem

A. Aceeași stea, aceeași înălțime

- (a) (2p) Din triunghiul sferic format de Polul Nord Ceresc, zenit și stea:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H. \quad (0,5p)$$

Cei doi observatori văd aceeași stea, deci δ este aceeași, se află la aceeași latitudine, deci φ este aceeași, iar în enunț se spune că steaua are aceeași înălțime h . Prin urmare,

$$\cos H_1 = \cos H_2. \quad (0,5p)$$

Dacă am avea $H_1 = H_2$, atunci, cum pentru aceeași stea avem

$$T_{sid} = H + \alpha,$$

ar rezulta

$$T_{sid,1} = T_{sid,2}.$$

Dar observațiile au loc la același Timp Universal, deci și același T_G . Din relația dintre timpul sideral și longitudinea ar rezulta atunci că $\lambda_1 = \lambda_2$, ceea

ce contrazice faptul că Teodor și Diana se află în locații diferite, unul în emisfera vestică, celălalt în emisfera estică. Deci cazul $H_1 = H_2$ este imposibil. **(0,5p)**

Rămâne a doua posibilitate:

$$\boxed{H_1 = 24^h - H_2}. \quad (0,5p)$$

(b) **(2p)** În general,

$$T_{local} = T_{sid} - \alpha_{\odot} + 12^h - \lambda + f, \quad (0,5p)$$

unde f este fusul orar.

În ziua echinocțiului de primăvară,

$$\alpha_{\odot} = 0.$$

Deci

$$T_{local} = T_{sid} + 12^h - \lambda + f. \quad (0,5p)$$

Dar, cum $\alpha_{\odot} = 0$,

$$T_{universal} = T_{sid} + 12^h - \lambda = T_{local} - f. \quad (0,5p)$$

Cum la Greenwich $f_{Greenwich} = 0$, avem

$$T_{local,loc} - f_{loc} = T_{local,Greenwich} - f_{Greenwich}$$

$$T_{local} - f = T_{local,Greenwich} = T_G. \quad (0,5p)$$

$$\boxed{T_{local} - f = T_G}.$$

(c) **(2p)** La echinocțiul de primăvară,

$$T_{sid} = T_G - 12^h + \lambda, \quad (0,25p)$$

cu λ exprimată în ore și pozitivă spre est.

Pentru Teodor,

$$\lambda_1 = 60^\circ V = -4^h. \quad (0,25p)$$

Atunci

$$T_{sid,1} = 18^h 18^m - 12^h - 4^h = 2^h 18^m. \quad (0,25p)$$

Unghiul orar al stelei este

$$H_1 = T_{sid,1} - \alpha = 2^h 18^m - 16^h 30^m = -14^h 12^m.$$

În convenția $[0, 24^h)$, aceasta înseamnă

$$H_1 \equiv 9^h 48^m \pmod{24^h}. \quad (0,25p)$$

Din punctul (a),

$$H_2 = 24^h - H_1 = 24^h - 9^h 48^m = 14^h 12^m. \quad (0,25p)$$

Pentru Diana,

$$T_{sid,2} = \alpha + H_2 = 16^h 30^m + 14^h 12^m = 30^h 42^m \equiv 6^h 42^m \pmod{24^h}. \quad (0,25p)$$

Folosind din nou relația

$$T_{sid,2} = T_G - 12^h + \lambda_2,$$

obținem

$$\lambda_2 = T_{sid,2} - T_G + 12^h. \quad (0,25p)$$

Înlocuind valorile numerice,

$$\lambda_2 = 6^h 42^m - 18^h 18^m + 12^h = 24^m.$$

Cum $1^h = 15^\circ$, rezultă

$$\lambda_2 = 24^m = 6^\circ. \quad (0,25p)$$

Deci

$$\boxed{\lambda_2 = 6^\circ \text{ E}}.$$

Notă: Orice metodă de rezolvare corectă trebuie punctată corespunzător.

B. Stele diferite, același azimut

(a) (1p) Din triunghiul sferic format de Polul Nord Ceresc, zenit și stea:

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A. \quad (0,5p)$$

Pentru steaua S_1 ,

$$\sin \delta_1 = \sin \varphi \sin h_1 - \cos \varphi \cos h_1 \cos A.$$

$$\cos A = \frac{\sin \varphi \sin h_1 - \sin \delta_1}{\cos \varphi \cos h_1}. \quad (0,5p)$$

(b) (3p) Pentru cele două stele, avem

$$\sin \delta_1 = \sin \varphi \sin h_1 - \cos \varphi \cos h_1 \cos A,$$

$$\sin \delta_2 = \sin \varphi \sin h_2 - \cos \varphi \cos h_2 \cos A.$$

Obținem $\cos A$:

$$\cos A = \frac{\sin \varphi \sin h_1 - \sin \delta_1}{\cos \varphi \cos h_1}$$
$$\cos A = \frac{\sin \varphi \sin h_2 - \sin \delta_2}{\cos \varphi \cos h_2}. \quad (0,5p)$$

Egalându-le, $\cos \varphi$ se simplifică

$$(\sin \varphi \sin h_1 - \sin \delta_1) \cdot \cos h_2 = (\sin \varphi \sin h_2 - \sin \delta_2) \cdot \cos h_1. \quad (0,5p)$$

$$\sin \varphi \sin h_1 \cdot \cos h_2 - \sin \delta_1 \cdot \cos h_2 = \sin \varphi \sin h_2 \cdot \cos h_1 - \sin \delta_2 \cdot \cos h_1.$$

Prin urmare,

$$\sin \varphi \sin h_1 \cdot \cos h_2 - \sin \varphi \sin h_2 \cdot \cos h_1 = \sin \delta_1 \cdot \cos h_2 - \sin \delta_2 \cdot \cos h_1.$$

$$\sin \varphi (\sin h_1 \cos h_2 - \sin h_2 \cos h_1) = \sin \delta_1 \cdot \cos h_2 - \sin \delta_2 \cdot \cos h_1.$$

$$\sin \varphi \cdot \sin(h_1 - h_2) = \sin \delta_1 \cdot \cos h_2 - \sin \delta_2 \cdot \cos h_1. \quad (0,5p)$$

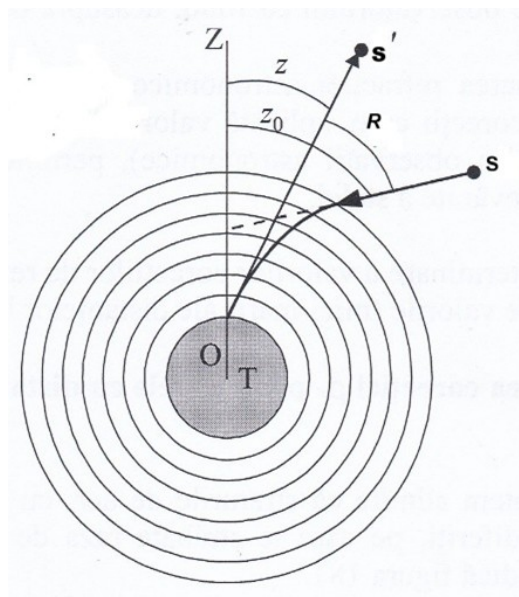
$$\varphi = \arcsin \left(\frac{\sin \delta_1 \cdot \cos h_2 - \sin \delta_2 \cdot \cos h_1}{\sin(h_1 - h_2)} \right). \quad (0,5p)$$

Înlocuind valorile numerice din enunț, rezultatul final este

$$\boxed{\varphi = 70^\circ}. \quad (1p)$$

Notă: Orice metodă de rezolvare corectă trebuie punctată corespunzător.

Problema 3 Refracția atmosferică (10 puncte)



Refracția astronomică constă în schimbarea direcției de propagare a razelor de lumină care vin de la aștrii îndepărtați datorită faptului că de la intrarea în atmosferă indicele

de refracție al straturilor de aer din atmosferă crește ușor (datorită creșterii densității), până la suprafața Pământului.

O schemă a acestui fenomen este prezentată în figura alăturată, în care S reprezintă poziția reală a unei stele iar S' este poziția aparentă (observată).

Parametrul ce caracterizează acest fenomen la observarea unui astru este mărimea $R = z_0 - z$ numită *refracție*, adică diferența dintre distanța zenitală adevărată a stelei și distanța zenitală aparentă (observată).

Pentru distanțe zenitale mici, se poate admite că straturile de aer cu indici de refracție diferiți pe care le străbate raza de lumină sunt plane și paralele.

Se cunosc:

- indicele de refracție al atmosferei la suprafața Pământului: $n_0 = 1,00028$;
- $1 \text{ rad} = 206265''$.

Cerințe:

- a) [3 p] Deduceți în aceste condiții relația de dependență a refracției în funcție de distanța zenitală aparentă z ;
- b) [2 p] Se măsoară altitudinea unei stele și se obține $h = 85^\circ$. Calculează refracția R în secunde de arc;
- c) [3 p] Două stele A și B se află pe același cerc vertical (aceeași direcție zenitală), de aceeași parte a zenitului, cu distanțe azimutale aparente $z_A = 3^\circ$, respectiv $z_B = 6^\circ$. Determinați cu cât se modifică separarea unghiulară aparentă $\Delta z = z_B - z_A$ față de separarea unghiulară adevărată $\Delta z_0 = z_{0B} - z_{0A}$;
- d) [2 p] Un elev determină latitudinea observatorului măsurând la culminație meridiană o stea apropiată de zenit. Steaua are declinația cunoscută δ , iar la culminație se află la sud de zenit (deci $z_0 = \varphi - \delta$). Elevul ignoră refracția astronomică și folosește distanța zenitală aparentă în loc de cea adevărată. Exprimați eroarea $\Delta\varphi$ în funcție de R și calculați $\Delta\varphi$ în secunde de arc pentru o distanță zenitală aparentă $z = 4^\circ$.

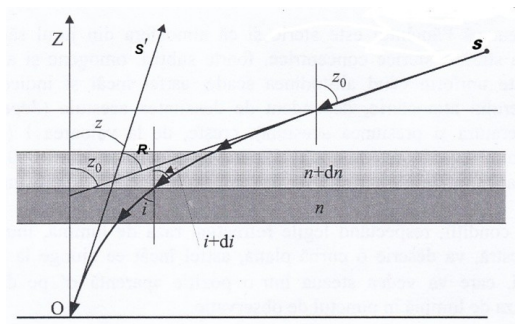
Barem

a)

Desen și ipoteze

1p

- Se consideră două straturi de aer vecine, cu indici de refracție constanți dar puțin diferiți, n și $n + dn$ (unde $dn < 0$)
- Raza de lumină parcurge aceste straturi, respectând legea refracției.



Legea refracției: Pentru două straturi consecutive, relația este:

$$n \sin i = (n + dn) \sin(i + di) \quad 0,5p$$

Aplicând această relație succesiv de la intrarea în atmosferă ($n = 1$, $i = z_0$) până la suprafața Pământului ($n = n_0$, $i = z$), obținem:

$$\sin z_0 = n_0 \sin z \quad 0,5p$$

Calculul refracției (R): Știind că $R = z_0 - z$, rezultă $z_0 = z + R$. Înlocuind în formula anterioară[cite: 1]:

$$\sin(z + R) = n_0 \sin z$$

$$\sin z \cos R + \sin R \cos z = n_0 \sin z \quad 0,5p$$

În aproximația unghiurilor mici ($\cos R \approx 1$ și $\sin R \approx R$), relația devine[cite: 1]:

$$\sin z + R \cos z = n_0 \sin z$$

$$R \cos z = (n_0 - 1) \sin z$$

$$R = (n_0 - 1) \tan z$$

Folosind constanta refracției astronomice $a_r = n_0 - 1$, obținem formula finală[cite: 1]:

$$R = a_r \tan z \quad 0,5p$$

b) Calculul refracției pentru $h = 85^\circ$

- **Distanța zenitală:** $z = 90^\circ - h = 90^\circ - 85^\circ = 5^\circ$
- **Conversie în radiani:** $z = 5 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,08726$ rad
- **Constanta refracției:** $a_r = 1,00028 - 1 = 0,00028 = 2,8 \cdot 10^{-4}$
- **Refracția în radiani:**

1p

$$R = 2,8 \cdot 10^{-4} \cdot \tan(5^\circ) \approx 2,8 \cdot 10^{-4} \cdot 0,08749 \approx 2,45 \cdot 10^{-5} \text{ rad}[cite : 1]$$

- **Refracția în secunde de arc:**

1p

$$R = 2,45 \cdot 10^{-5} \cdot 206265 \approx 5,05''$$

c) Modificarea separării unghiulare

Din formula generală a refracției:

$$\Delta z = (z_{0B} - z_{0A}) - (R_B - R_A)$$

$$\Delta z = \Delta z_0 - a_r(\tan z_B - \tan z_A)$$

1p

Pentru $z_B = 6^\circ$ și $z_A = 3^\circ$:

- $\tan 6^\circ \approx 0,1051$
- $\tan 3^\circ \approx 0,05241$

0,5p

Calculul diferenței:

$$\Delta z - \Delta z_0 = -2,8 \cdot 10^{-4}(0,1051 - 0,05241) \cdot 206265 \approx -3,04''$$

1p

Concluzie: Distanțele pe verticală se comprimă deoarece steaua aflată mai departe de zenit este refractată mai mult .

0,5p

d) Eroarea de latitudine

- **Latitudinea reală:** $\varphi = z_0 + \delta$
- **Latitudinea calculată de elev:** $\varphi' = z + \delta$ (unde $z = z_0 - R$)
- **Eroarea:** $\Delta\varphi = \varphi' - \varphi = (z_0 - R + \delta) - (z_0 + \delta) = -R$

1p

Pentru $z = 4^\circ$:

$$\Delta\varphi = -a_r \tan 4^\circ = -2,8 \cdot 10^{-4} \cdot 0,06993 \cdot 206265 \approx -4''$$

Latitudinea este subevaluată cu aproximativ $4''$.

1p

Subiectul III Probleme Lungi (30 puncte)

Problema 1 Observarea exoplanetelor de pe Vârful Înalt (20 puncte)

Un astronom amator se află pe vârful unui munte situat exact pe ecuatorul unei exoplanete (latitudine $\varphi = 0^\circ$). Exoplaneta are o rază $R_p = 8000$ km și o perioadă de rotație proprie $P_{\text{rot}} = 20$ ore. Muntele are o altitudine $H = 10$ km. Masa stelei centrale a sistemului este $M_* = 1,2 M_\odot$.

În acest sistem planetar mai există două planete notabile, ambele situate pe orbite circulare în planul ecuatorial al planetei observatorului. Se neglijează mișcarea orbitală a planetei pe care se află observatorul în jurul stelei centrale:

- **O planetă interioară**, numită *Sub-Tyche*, care are o rază $R_{\text{sub}} = 0,5 R_p$ și produce tranzituri periodice vizibile de pe exoplaneta observatorului.
- **O planetă exterioară**, numită *Supra-Tyche*, care are o rază $R_{\text{sup}} = 0,5 R_p$ și o perioadă siderală $T = 40$ ore.

- a) [2 p] Calculați valoarea coborârii orizontului (Δh_{alt}) pentru astronomul de pe vârf. În momentul în care acesta vede centrul stelei exact pe orizontul său vizibil, la ce înălțime astronomică h se află centrul stelei față de orizontul matematic?

- b) [4 p] Determinați raza orbitei planetei *Supra-Tyche* în UA și viteza sa unghiulară relativă (aparentă) față de observatorul de pe munte. Cine se mișcă mai repede pe cerul local: steaua centrală sau planeta exterioară?
- c) [5 p] În timpul unui tranzit al planetei interioare *Sub-Tyche* peste discul stelei (considerând raza stelei $R_* = 1 R_\odot$), calculați creșterea numerică a magnitudinii aparente a stelei, adică adâncimea tranzitului exprimată în magnitudini (Δm). Este această adâncime mai mare sau mai mică decât cea produsă de tranzitul Pământului peste Soare (așa cum ar fi văzut de un observator îndepărtat)?
- d) [4 p] Dacă planeta exterioară *Supra-Tyche* se află la opoziție și culminează la miezul nopții, determinați cât timp este ea vizibilă pe cer pentru astronomul de pe vârf. Se va lua în calcul coborârea orizontului și se va neglija refracția atmosferică, precum și mișcarea orbitală a planetei observatorului.
- e) [5 p] Știind că planeta exterioară *Supra-Tyche* are un albedo $A = 0,5$, calculați raportul fluxurilor F_p/F_* în momentul opoziției, știind că distanța la opoziție este aproximativ egală cu raza orbitală $d \simeq a$. Telescopul astronomului poate detecta planeta dacă raportul fluxurilor satisface condiția $F_p/F_* \geq 1,0 \cdot 10^{-8}$. Va fi planeta vizibilă direct?

Barem

- a) [2 p] Unghiul de coborâre a orizontului θ :

$$\cos \theta = \frac{R_p}{R_p + H} = \frac{8000}{8010} \approx 0,99875. \quad (1 \text{ p})$$
 $\theta \approx 2,86^\circ$. În momentul în care centrul stelei atinge orizontul vizibil, acesta se află la o înălțime astronomică negativă $h = -2,86^\circ$ față de orizontul matematic. (1 p)
- b) [4 p] Din Legea a III-a a lui Kepler, $a^3 = \frac{GM_* T^2}{4\pi^2}$.
 Cu $M_* = 1,2 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \approx 2,38 \cdot 10^{30}$ kg și $T = 40^h = 1,44 \cdot 10^5$ s:

$$a = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,38 \cdot 10^{30} \cdot (1,44 \cdot 10^5)^2}{4\pi^2}} \approx 4,36 \cdot 10^9 \text{ m} = 4,36 \cdot 10^6 \text{ km}. \quad (1 \text{ p})$$
 În Unități Astronomice: $a = \frac{4,36 \cdot 10^6}{149,6 \cdot 10^6} \approx 0,029 \text{ UA}. \quad (1 \text{ p})$
 Viteze pe bolta cerească: Rotația proprie imprimă o mișcare aparentă a boltei (inclusiv a stelei) spre vest de $\omega_{rot} = \frac{360^\circ}{20^h} = 18^\circ/\text{oră}. \quad (1 \text{ p})$
 Planeta *Supra-Tyche* are o mișcare orbitală proprie de $\omega_{orb} = \frac{360^\circ}{40^h} = 9^\circ/\text{oră}$. Viteza ei aparentă față de observator va fi diferența: $\omega_{app} = 18^\circ/h - 9^\circ/h = 9^\circ/\text{oră}$. Deci, **steaua se mișcă mai repede** (de 2 ori) pe cerul local comparativ cu planeta exterioară. (1 p)
- c) [5 p] Aria stelei acoperită de *Sub-Tyche* (fracțiunea de flux blocată) f :

$$f = \left(\frac{R_{sub}}{R_*}\right)^2 = \left(\frac{4000}{696000}\right)^2 \approx 3,3 \cdot 10^{-5}. \quad (2 \text{ p})$$
 Creșterea numerică a magnitudinii aparente (adâncimea tranzitului exprimată în magnitudini) este: $\Delta m = -2,5 \log_{10}(1 - f) \approx \frac{2,5 \cdot f}{\ln 10} \approx 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ mag}. \quad (2 \text{ p})$
 Pentru tranzitul Pământului: $f_\oplus = \left(\frac{6371}{696000}\right)^2 \approx 8,4 \cdot 10^{-5}$.
 Adâncimea tranzitului, exprimată în magnitudini, este **mai mică** pentru exoplaneta interioară comparativ cu cea produsă de Pământ. (1 p)

- d) [4 p] La ecuator ($\varphi = 0^\circ$), o planetă aflată în planul ecuatorial ($\delta = 0^\circ$) descrie un arc deasupra orizontului matematic de 180° . Datorită coborârii orizontului vizibil cu θ la ambele capete, arcul total vizibil este $180^\circ + 2\theta = 180^\circ + 5,72^\circ = 185,72^\circ$. (2 p)

$$\text{Timpul de vizibilitate: } t_{viz} = \frac{\text{Arcul vizibil}}{\omega_{app}} = \frac{185,72^\circ}{9^\circ/\text{oră}} \approx 20,63 \text{ ore.} \quad (2 \text{ p})$$

- e) [5 p] Considerând distanța observator-planetă la opoziție aproximativ egală cu raza orbitală a calculată la punctul b), raportul fluxurilor se estimează

$$F_p/F_* = \frac{A\Phi}{8} \left(\frac{R_{sup}}{d}\right)^2. \text{ La opoziție se ia } \Phi = 1 \text{ și } d \simeq a, \text{ deci:}$$

$$\frac{F_p}{F_*} = \frac{A}{8} \cdot \left(\frac{R_{sup}}{a}\right)^2. \quad (3 \text{ p})$$

$$\hat{\text{Înlocuind valorile: }} \frac{F_p}{F_*} = 0,5 \cdot \left(\frac{4000}{4,36 \cdot 10^6}\right)^2 \approx 5,25 \cdot 10^{-8}. \quad (2 \text{ p})$$

Problema 2 Sistemul ONA-2026-BLG-0414 (10 puncte)

Sistemul ONA-2026-BLG-0414 conține o pitică albă cu masa $M = 1,1M_\odot$, luminozitatea $L = 0,01L_\odot$ și raza $R = 0,8R_\oplus$ în jurul căreia orbitează o exoplanetă ONA-2026-BLG-0414 b de tip teluric cu masa $m = 1,9m_\oplus$ și aceeași densitate ca Pământul.

- a) [3 p] Considerând că pitica albă se află în echilibru hidrostatic, determinați presiunea internă din centrul său și comparați această presiune cu cea din centrul Soarelui.
- b) [4 p] Având un diametru comparabil cu al Pământului, dar o masă comparabilă cu a Soarelui, a fost dificil să se înțeleagă stabilitatea piticelor albe, care ar fi trebuit să colapseze gravitațional. Calculați presiunea internă a piticei albe, considerând că aceasta este determinată de electronii aflați într-o stare specială (electroni complet degenerați) care formează un gaz ideal având densitatea volumică $n_e = \frac{\rho}{2m_p}$, unde ρ este densitatea piticei albe, iar m_p masa protonului. Comparați rezultatul obținut cu cel calculat la punctul a.
- c) [3 p] Verificați dacă exoplaneta care orbitează în jurul piticei albe având semiaxa mare $a = 0,5 \text{ UA}$, excentricitatea $e = 0,1$, albedoul $\alpha = 0,1$ și o mișcare de rotație proprie rapidă se află în zona de habitabilitate (în sens larg, zona în care forțele mareice exercitate de pitica albă nu dezintegrează planeta, respectiv este posibilă existența apei sub formă lichidă la suprafața planetei).

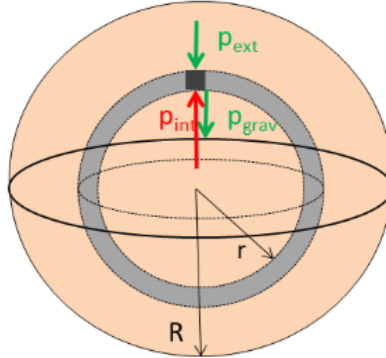
Se cunosc: constanta atracției universale $k = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, $1 \text{ UA} = 150.000.000 \text{ km}$, densitatea exoplanetei $\rho_{ex} = 5,5 \text{ g/cm}^3$, constanta Planck $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, masa de repaus a electronului $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, masa protonului $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, masa Soarelui $M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, raza Pământului $R_\oplus = 6370 \text{ km}$, temperatura la suprafața Soarelui $T_\odot = 5800 \text{ K}$, raza Soarelui $R_\odot = 696.340 \text{ km}$

Barem

a.

Condiția de echilibru hidrostatic:

$$p_{\text{int}} = p_{\text{ext}} + p_{\text{gravitațional}}$$



$$p_{\text{ext}} = p_{\text{int}} + dp \quad 0,5p$$

$$p_{\text{gravitațional}} = \frac{k m(r) \rho}{r^2} dr \quad 0,5p$$

unde $m(r)$ este masa corespunzătoare sferei de rază r , iar ρ este densitatea stelei. Obținem ecuația de echilibru hidrostatic:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho(r) k \frac{M}{r^2} \quad 0,5p$$

Dacă la $r = R$ presiunea se anulează, iar pentru $r = 0$ presiunea este presiunea în centrul stelei, obținem presiunea centrală:

$$p_c = \frac{\rho k M}{R} \quad 0,5p$$

unde M este masa stelei, R raza stelei, iar ρ densitatea. Am presupus că steaua este omogenă, astfel încât $\rho = \langle \rho \rangle$, unde $\langle \rho \rangle$ este densitatea medie a stelei.

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$p_c = \frac{3kM^2}{4\pi R^4} \quad 0,5p$$

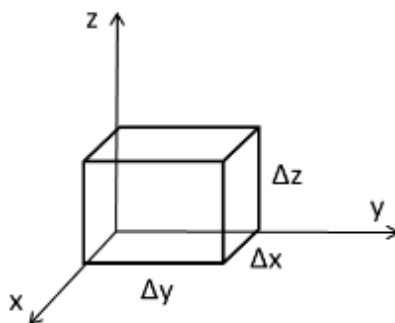
$$p_c = 1,13 \cdot 10^{23} \text{ N/m}^2$$

$$\frac{p_c}{p_{c,\text{Soare}}} \approx 4,22 \cdot 10^8 \quad 0,5p$$

b. În gazul electronic un electron ocupă volumul minim.

În acord cu principiul de nedeterminare al lui Heisenberg, pentru cele trei direcții vom avea:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar$$



$$\Delta p_y \Delta y \geq \hbar$$

$$\Delta p_z \Delta z \geq \hbar$$

0,5p

unde \hbar este constanta lui Planck raționalizată.

Considerăm că impulsul unui electron, p , este de ordinul nedeterminării impulsului, Δp .

Direcțiile sunt echivalente, iar volumul este volumul unui cub, deci:

$$v = (\Delta x)^3$$

Volumul total este:

$$V = Nv$$

(fiecare electron ocupă un volum v asociat unei stări, în conformitate cu principiul lui Pauli).

$$n_e = \frac{N}{V} = \frac{1}{(\Delta x)^3}$$

0,5p

În acord cu teoria cinetico-moleculară, presiunea gazului ideal electronic este:

$$P = \frac{1}{3} n_e m_e \bar{v}^2$$

i) Cazul nerelativist. Fie p impulsul electronului.

$$P = \frac{2}{3} n_e \frac{p^2}{2m_e}$$

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 3p_x^2$$

$$p = \sqrt{3} p_x$$

0,5p

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{\Delta x} = \hbar \sqrt[3]{n_e}$$

$$p = \sqrt{3} \hbar \sqrt[3]{n_e}$$

0,5p

$$p = \sqrt{3} \hbar \sqrt[3]{\frac{\rho}{2m_p}}$$

Presiunea devine:

$$P = \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{\rho}{2m_p} \right)^{5/3}$$

$$P = 1,62 \cdot 10^{22} \text{ N/m}^2$$

0,5p

ii) Cazul relativist.

Volumului foarte mic al cubului îi corespunde o nedeterminare Δx foarte mică, deci o nedeterminare Δp foarte mare. Dar $p \sim \Delta p$.

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Energia totală a electronului este:

$$E = m_0 c^2 + E_c$$

unde E_c este energia cinetică.

$$p = \frac{E_c}{c} \left(1 + \frac{2m_0 c^2}{E_c} \right)^{1/2}$$

0,5p

Folosind aproximația binomială:

$$\left(1 + \frac{2m_0 c^2}{E_c} \right)^{1/2} \approx 1 + \frac{m_0 c^2}{E_c} \approx 1$$

Rezultă:

$$p \approx \frac{E_c}{c}$$

0,5p

Înlocuind în formula presiunii:

$$P = \frac{1}{3} n_e m_e \overline{v^2} = \frac{2}{3} n_e p c$$

$$p = \sqrt{3} \hbar \sqrt[3]{n_e}$$

$$P = \frac{2c\hbar}{\sqrt{3}} \left(\frac{\rho}{2m_p} \right)^{4/3}$$

$$P = 2,87 \cdot 10^{23} \text{ N/m}^2$$

0,5p

Observăm că valoarea obținută în cazul relativist are același ordin de mărime ca valoarea calculată la punctul a.

c.

Orbita exoplanetei este stabilă dacă se află în exteriorul razei Roche:

$$r_R = 2,44 R_p \left(\frac{M}{m} \right)^{1/3}$$

unde R_p este raza planetei.

$$r_R = 5,35 \cdot 10^6 \text{ km} \quad 0,5\text{p}$$

În cazul exoplanetei, distanța minimă față de pitica albă este:

$$r_{\min} = a(1 - e) = 0,45 \text{ UA} > r_R$$

Deci orbita exoplanetei este stabilă. 0,5p

Aplicând legea Stefan-Boltzmann pentru pitica albă și pentru Soare, obținem temperatura efectivă la suprafața piticei albe:

$$T = T_{\odot} \left(\frac{R_{\odot}}{R} \right)^{1/2} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{1/4}$$

$$T = 21\,439,96 \text{ K} \quad 0,5\text{p}$$

Ținând cont de bilanțul radiativ și de faptul că exoplaneta are o rotație proprie rapidă (primește radiație pe întreaga suprafață), temperaturile extreme la suprafața exoplanetei sunt:

$$T_{\min} = T(1 - \alpha)^{1/4} \sqrt{\frac{R}{2r_{\max}}} \quad 0,5\text{p}$$

unde

$$r_{\max} = a(1 + e) = 0,55 \text{ UA}$$

$$T_{\min} = 116 \text{ K} \quad 0,5\text{p}$$

$$T_{\max} = T(1 - \alpha)^{1/4} \sqrt{\frac{R}{2r_{\min}}}$$

$$T_{\max} = 128,3 \text{ K} \quad 0,5\text{p}$$

Deoarece întregul interval de temperatură nu permite existența apei lichide la suprafața exoplanetei, rezultă că această exoplanetă nu se află în zona de habitabilitate, chiar dacă orbita exoplanetei este stabilă.