

1. Se punctează oricare alte formulări / modalități de rezolvare corectă a cerințelor.
2. Nu se acordă punctaje intermediare la subiectele de tip grilă.
3. Timp de lucru 3 ore
4. Subiectul este redactat pe 10 pagini.
5. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Tabel de constante fizice și astronomice

| Constantă | Simbol | Valoare | Unități |
|--------------------------------|-----------------|-------------------------|---|
| Constanta lui Planck | h | 6.626×10^{-34} | J·s |
| Constanta atracției universale | G | 6.674×10^{-11} | $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ |
| Raza Pământului | R_{\oplus} | 6371 | km |
| Viteza luminii | c | 3.0×10^8 | m/s |
| Unitatea astronomică | UA | 1.496×10^8 | km |
| Masa Soarelui | M_{\odot} | 1.989×10^{30} | kg |
| Masa Pământului | M_{\oplus} | 5.972×10^{24} | kg |
| Masa Lunii | M_L | 7.43×10^{22} | kg |
| Perioada orbitală a Pământului | P_{\oplus} | 365, 25 | zile |
| Constanta lui Boltzmann | k | 1.380×10^{-23} | J/K |
| Constanta Stefan-Boltzmann | σ | 5.670×10^{-8} | $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ |
| Masa electronului | m_e | 9.10×10^{-31} | kg |
| Masa protonului | m_p | 1.67×10^{-27} | kg |
| Constanta lui Avogadro | N_A | 6.022×10^{23} | mol^{-1} |
| Permitivitatea vidului | ε_0 | 8.854×10^{-12} | F/m |

Subiectul I Misterul sistemului Draco-26 (40 puncte)

Telescopul spațial CHEOPS a monitorizat timp de 40 de zile o stea pitică portocalie de clasă spectrală K, denumită Draco-26. Din măsurătorile spectroscopice se cunosc următoarele date:

- masa stelei: $M_* = 0,8M_{\odot}$;
 - raza stelei: $R_* = 0,8R_{\odot}$;
 - temperatura la suprafață: $T_* = 5000 \text{ K}$.
- a) [8 p] Analizați curba de lumină furnizată. Identificați câte planete distincte tranzitează steaua Draco-26, grupând minimele după adâncime și periodicitate. Determinați perioada orbitală aproximativă P , exprimată în zile, precum și adâncimea tranzitului $\Delta F/F_0$ pentru fiecare planetă identificată.
- b) [12 p] Folosind adâncimile tranzitelor determinate la punctul a), calculați raza fiecărei planete identificate. Exprimați rezultatele în raze terestre (R_{\oplus}) sau raze joviene (R_J), după cum considerați că este mai reprezentativ pentru clasificarea fiecărei planete.
- c) [8 p] Calculați axa semimajoră a a orbitei planetei care produce tranzitul cel mai adânc.

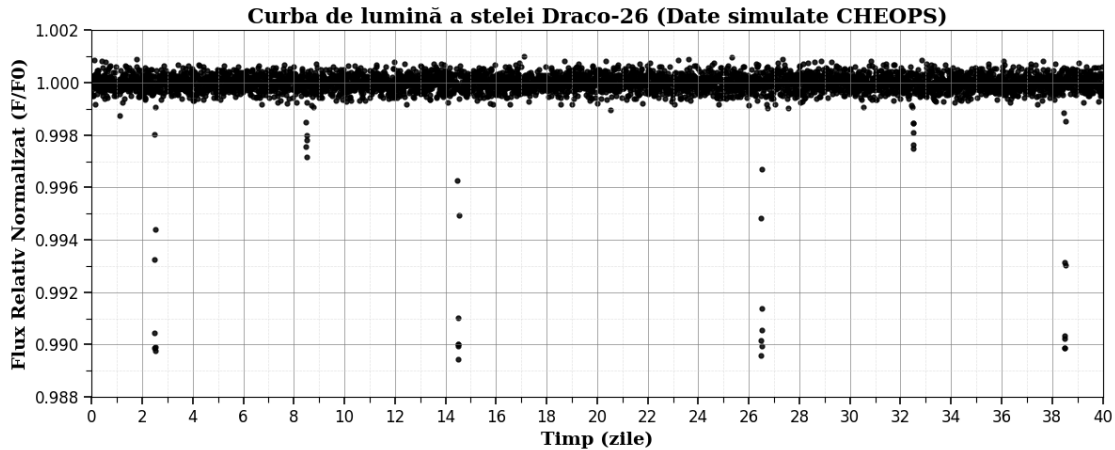


Figure 1: Curba de lumină a stelei Draco-26: fluxul relativ F/F_0 în funcție de timp.

- d) [8 p] Calculați luminozitatea stelei Draco-26 raportată la luminozitatea Soarelui (L_*/L_\odot). Pe baza acesteia și a distanței calculate la punctul c), determinați fluxul de energie primit de planeta principală comparativ cu cel primit de Pământ. Considerând doar fluxul incident, discutați dacă această planetă ar putea găzdui apă lichidă.
- e) [4 p] Un astronom amator propune ipoteza că minimele mai puțin adânci aparțin unei exoluni uriașe care orbitează planeta principală. Cum ați putea infirma această ipoteză analizând exclusiv momentele, adică valorile timpului t , la care au loc evenimentele observate pe grafic?

Barem - Misterul sistemului Draco-26 (40 puncte)

• a) Identificarea planetelor și a parametrilor de tranzit (8p)

- Identificarea corectă din grafic a existenței a două planete distincte. (2p)
- **Planeta 1 (tranzit adânc):** Identificarea minimelor la zilele $t \approx 2,5; 14,5; 26,5; 38,5$. Determinarea perioadei $P_1 = 12$ zile și a adâncimii $\Delta F_1/F_0 \approx 0,010$ (1%). (3p)
- **Planeta 2 (tranzit superficial):** Identificarea minimelor la zilele $t \approx 8,5; 32,5$. Determinarea perioadei $P_2 = 24$ zile și a adâncimii $\Delta F_2/F_0 \approx 0,0025$ (0,25%). (3p)

• b) Calculul razei planetelor (12p)

- Pentru deducerea: $\frac{\Delta F}{F_0} = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2$. (4p)
- **Raza Planetei 1:** $R_{p1} = \sqrt{0,010} \cdot R_* = 0,1 \cdot 0,8R_\odot = 0,08R_\odot$.
Exprimarea în unități adecvate: $R_{p1} \approx 8,7R_\oplus$. Alternativ, raportat la Jupiter, $R_{p1} \approx 0,8R_J$. (4p)
- **Raza Planetei 2:** $R_{p2} = \sqrt{0,0025} \cdot R_* = 0,05 \cdot 0,8R_\odot = 0,04R_\odot$. Exprimarea în unități adecvate: $R_{p2} \approx 4,4R_\oplus$. (4p)

• c) Determinarea semiaxei mari (8p)

- Aplicarea legii a III-a a lui Kepler: $P^2 = \frac{a^3}{M_*}$. (4p)
- Conversia perioadei: $P \approx \frac{12}{365,25} \approx 0,0328$ ani. (2p)

– Calculul final: $a^3 = (0,0328)^2 \cdot 0,8 \approx 0,00086 \implies a \approx 0,095 \text{ UA}$. (2p)

• d) Habitabilitatea (8p)

– Raportul luminozităților: $\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T_*}{T_{\odot}}\right)^4 = 0,8^2 \cdot \left(\frac{5000}{5800}\right)^4 \approx 0,35$. (4p)

– Raportul fluxurilor: $\frac{F_p}{F_{\oplus}} = \frac{L_*/L_{\odot}}{(a/1 \text{ UA})^2} = \frac{0,35}{(0,095)^2} \approx 39$. (2p)

– Planeta se află prea aproape de stea pentru a găzdui apă lichidă. (2p)

• e) Infirmarya ipotezei exolunii (4p)

– O exolună asociată planetei principale ar trebui să producă evenimente corelate temporal cu tranzitele acesteia, adică în jurul momentelor de timp în care planeta principală tranzitează discul stelar. În grafic, minimele mai puțin adânci apar la $t \approx 8,5$ zile și $t \approx 32,5$ zile, au o periodicitate proprie de aproximativ 24 zile și nu sunt corelate cu tranzitele principale de la $t \approx 2,5; 14,5; 26,5; 38,5$ zile. Prin urmare, acestea indică mai probabil o a doua planetă, nu o exolună a planetei principale. (4p)

Subiectul II Spectrele unor galaxii (50 puncte)

În această problemă se dau spectrele a 10 galaxii din Sloan Digital Sky Survey (SDSS) aflate la distanțe cunoscute față de observatorul de pe Pământ. În toate spectrele, cea mai puternică linie de emisie este H_{α} , a cărei lungime de undă în repaus este $\lambda_{H_{\alpha}} = 6564,6 \text{ \AA}$. Distanțele galaxie-observator sunt trecute în tabelul 1. Răspundeți la următoarele cerințe, folosind tabelul 1 și hârtia milimetrică pusă la dispoziție, pe care le veți preda împreună cu rezolvarea.

- [5 p] Determinați la ce lungime de undă se observă linie de emisie H_{α} pentru fiecare galaxie. Treceți rezultatele în tabel.
- [7,5 p] Determinați deplasarea spre roșu a fiecărei galaxii. Treceți rezultatele în tabel.
- [7,5 p] Calculați viteza cu care se depărtează fiecare galaxie de observator. Treceți rezultatele în tabel, cu unitățile de măsură corespunzătoare.
- [17 p] Realizați graficul viteză radială vs. distanță pe hârtia milimetrică pusă la dispoziție. Ce fel de dependență există între cele două mărimi? Trasați dependența pe hârtia milimetrică.
- [13 p] Determinați coeficienții din dependența identificată mai sus, folosind metoda celor mai mici pătrate. Ce însemnătate fizică (din punct de vedere teoretic sau din punct de vedere al analizei datelor) au acești coeficienți?

Relația pentru calculul coeficienților folosind metoda celor mai mici pătrate este:

$$a = \frac{N \sum d_i v_i - \sum d_i \sum v_i}{N \sum d_i^2 - (\sum d_i)^2}$$
$$b = \frac{\sum v_i - a \sum d_i}{N}$$

Table 1: Date pentru galaxii.

| Nr. galaxie | Distanță (Mpc) | λ_{obs} (Å) | Deplasare spre roșu | Viteza () |
|-------------|----------------|---------------------|---------------------|------------|
| 1 | 220 | | | |
| 2 | 285 | | | |
| 3 | 375 | | | |
| 4 | 475 | | | |
| 5 | 525 | | | |
| 6 | 590 | | | |
| 7 | 740 | | | |
| 8 | 815 | | | |
| 9 | 925 | | | |
| 10 | 970 | | | |

Barem - Spectrele unor galaxii (50 puncte)

- a) [5 p] λ_{obs} Å se determină prin măsurători pe fiecare grafic. Prin măsurarea unei cantități cunoscute (de exemplu, 500 Å în centimetri pe spectru, sau un segment bine încadrat pe riglă) pentru determinarea scalei imaginii se poate converti lungimea de undă din centimetri măsurată în Å. Valorile numerice din tabel sunt valorile exacte determinate ale liniilor de emisie, ne așteptăm să apară alte valori la elevi. Se acceptă valori de $\pm 25\text{Å}$ pentru punctaj maxim. Abatere de mai mult de 25Å dar mai mica de 50Å primește jumătate din punctaj. Vezi tabel pentru intervale.

| Nr. | Distanță (Mpc) | λ_{obs} (Å) | Punctaj maxim (0,5p x 10) | Jumătate (0,25p x 10) |
|-----|----------------|---------------------|---------------------------|--------------------------|
| 1 | 220 | 6892 | 6867 – 6917 | 6842 – 6867, 6917 – 6942 |
| 2 | 285 | 7020 | 6995 – 7045 | 6970 – 6995, 7045 – 7070 |
| 3 | 375 | 7157 | 7132 – 7182 | 7107 – 7132, 7182 – 7207 |
| 4 | 475 | 7286 | 7261 – 7311 | 7236 – 7261, 7311 – 7336 |
| 5 | 525 | 7418 | 7393 – 7443 | 7368 – 7393, 7443 – 7468 |
| 6 | 590 | 7555 | 7530 – 7580 | 7505 – 7530, 7580 – 7605 |
| 7 | 740 | 7681 | 7656 – 7706 | 7631 – 7656, 7706 – 7731 |
| 8 | 815 | 7811 | 7786 – 7836 | 7761 – 7786, 7836 – 7861 |
| 9 | 925 | 7943 | 7918 – 7968 | 7893 – 7918, 7968 – 7993 |
| 10 | 970 | 8074 | 8049 – 8099 | 8024 – 8049, 8099 – 8124 |

- b) [7,5 p] 2,5p formula + 5p rezultatele numerice. Dacă formula nu este scrisă, dar rezultatele numerice sunt bine calculate, se acordă și cele 5 puncte pentru formulă.

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{rest}}{\lambda_{rest}} = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{rest}} - 1$$

Vezi tabel pentru valorile numerice. Se acceptă valori de $\pm 0,004$ pentru punctaj maxim. Jumătate de punctaj se acordă pentru variații mai mari de 0,004, dar mai mici de 0,008.

| Nr. | Distanță (Mpc) | z | Maxim (0,5p x 10) | Jumătate (0,25p x 10) |
|-----|----------------|------|-------------------|------------------------------|
| 1 | 220 | 0,05 | 0,046 – 0,054 | 0,042 – 0,046, 0,054 – 0,058 |
| 2 | 285 | 0,07 | 0,066 – 0,074 | 0,062 – 0,066, 0,074 – 0,078 |
| 3 | 375 | 0,09 | 0,086 – 0,094 | 0,082 – 0,086, 0,094 – 0,098 |
| 4 | 475 | 0,11 | 0,106 – 0,114 | 0,102 – 0,106, 0,114 – 0,118 |
| 5 | 525 | 0,13 | 0,126 – 0,134 | 0,122 – 0,126, 0,134 – 0,138 |
| 6 | 590 | 0,15 | 0,146 – 0,154 | 0,142 – 0,146, 0,154 – 0,158 |
| 7 | 740 | 0,17 | 0,166 – 0,174 | 0,162 – 0,166, 0,174 – 0,178 |
| 8 | 815 | 0,19 | 0,186 – 0,194 | 0,182 – 0,186, 0,194 – 0,198 |
| 9 | 925 | 0,21 | 0,206 – 0,214 | 0,202 – 0,206, 0,214 – 0,218 |
| 10 | 970 | 0,23 | 0,226 – 0,234 | 0,222 – 0,226, 0,234 – 0,238 |

- c) [7,5 p] 1,5p formula + 5p rezultatele numerice + 1p unitățile de măsură. Dacă formula nu este scrisă, dar rezultatele numerice sunt bine calculate, se acordă și cele 2,5 puncte pentru formulă.

$$z = \frac{v_{rad}}{c}$$

$$v_{rad} = z \times c$$

Valorile vitezelor atingând valori de $0,2c$, este posibil ca elevii să fi folosit Doppler relativist. Se punctează maxim și această rezolvare.

$$v = c \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$$

Vezi tabel pentru valorile numerice și intervale. Se acceptă valori de $\pm 0,12 \times 10^4$ km/s pentru punctaj maxim. Jumătate de punctaj se acordă pentru variații mai mari de $0,12 \times 10^4$ km/s, dar mai mici de $0,24 \times 10^4$ km/s.

| Nr. | Distanță(Mpc) | Viteza($\times 10^4$ km/s) | Maxim(0,5p x 10) | Jumătate (0,25p x 10) |
|-----|---------------|-----------------------------|------------------|--------------------------|
| 1 | 220 | 1,5 | 1,38 – 1,62 | 1,26 – 1,38, 1,62 – 1,74 |
| 2 | 285 | 2,1 | 1,98 – 2,22 | 1,86 – 1,98, 2,22 – 2,34 |
| 3 | 375 | 2,7 | 2,58 – 2,82 | 2,46 – 2,58, 2,82 – 2,94 |
| 4 | 475 | 3,3 | 3,18 – 3,42 | 3,06 – 3,18, 3,42 – 3,54 |
| 5 | 525 | 3,9 | 3,78 – 4,02 | 3,66 – 3,78, 4,02 – 4,14 |
| 6 | 590 | 4,5 | 4,38 – 4,62 | 4,26 – 4,38, 4,62 – 4,74 |
| 7 | 740 | 5,1 | 4,98 – 5,22 | 4,86 – 4,98, 5,22 – 5,34 |
| 8 | 815 | 5,7 | 5,58 – 5,82 | 5,46 – 5,58, 5,82 – 5,94 |
| 9 | 925 | 6,3 | 6,18 – 6,42 | 6,06 – 6,18, 6,42 – 6,54 |
| 10 | 970 | 6,9 | 6,78 – 7,02 | 6,66 – 6,78, 7,02 – 7,14 |

Relativist

| Nr. | Distanță(Mpc) | Viteză($\times 10^4$ km/s) | Maxim(0,5p x 10) | Jumătate (0,25p x 10) |
|-----|---------------|-----------------------------|------------------|--------------------------|
| 1 | 220 | 1,46 | 1,35 – 1,58 | 1,23 – 1,35, 1,58 – 1,69 |
| 2 | 285 | 2,03 | 1,91 – 2,14 | 1,80 – 1,91, 2,14 – 2,25 |
| 3 | 375 | 2,58 | 2,47 – 2,69 | 2,36 – 2,47, 2,69 – 2,79 |
| 4 | 475 | 3,12 | 3,01 – 3,22 | 2,90 – 3,01, 3,22 – 3,33 |
| 5 | 525 | 3,65 | 3,54 – 3,75 | 3,44 – 3,54, 3,75 – 3,85 |
| 6 | 590 | 4,16 | 4,06 – 4,26 | 3,96 – 4,06, 4,26 – 4,36 |
| 7 | 740 | 4,67 | 4,57 – 4,77 | 4,47 – 4,57, 4,77 – 4,86 |
| 8 | 815 | 5,16 | 5,07 – 5,26 | 4,97 – 5,07, 5,26 – 5,35 |
| 9 | 925 | 5,65 | 5,55 – 5,74 | 5,46 – 5,55, 5,74 – 5,83 |
| 10 | 970 | 6,12 | 6,03 – 6,21 | 5,94 – 6,03, 6,21 – 6,30 |

d) [17 p]

Graficul este în figura de mai jos.

1p fiecare punct din grafic x 10 = **10p****0,5p** nume pe axa OX**0,5p** unități pe axa OX

0,5p împărțire rezonabilă a axei OX prin marcaje și valori numerice

0,5p nume pe axa OY

0,5p unități pe axa OY

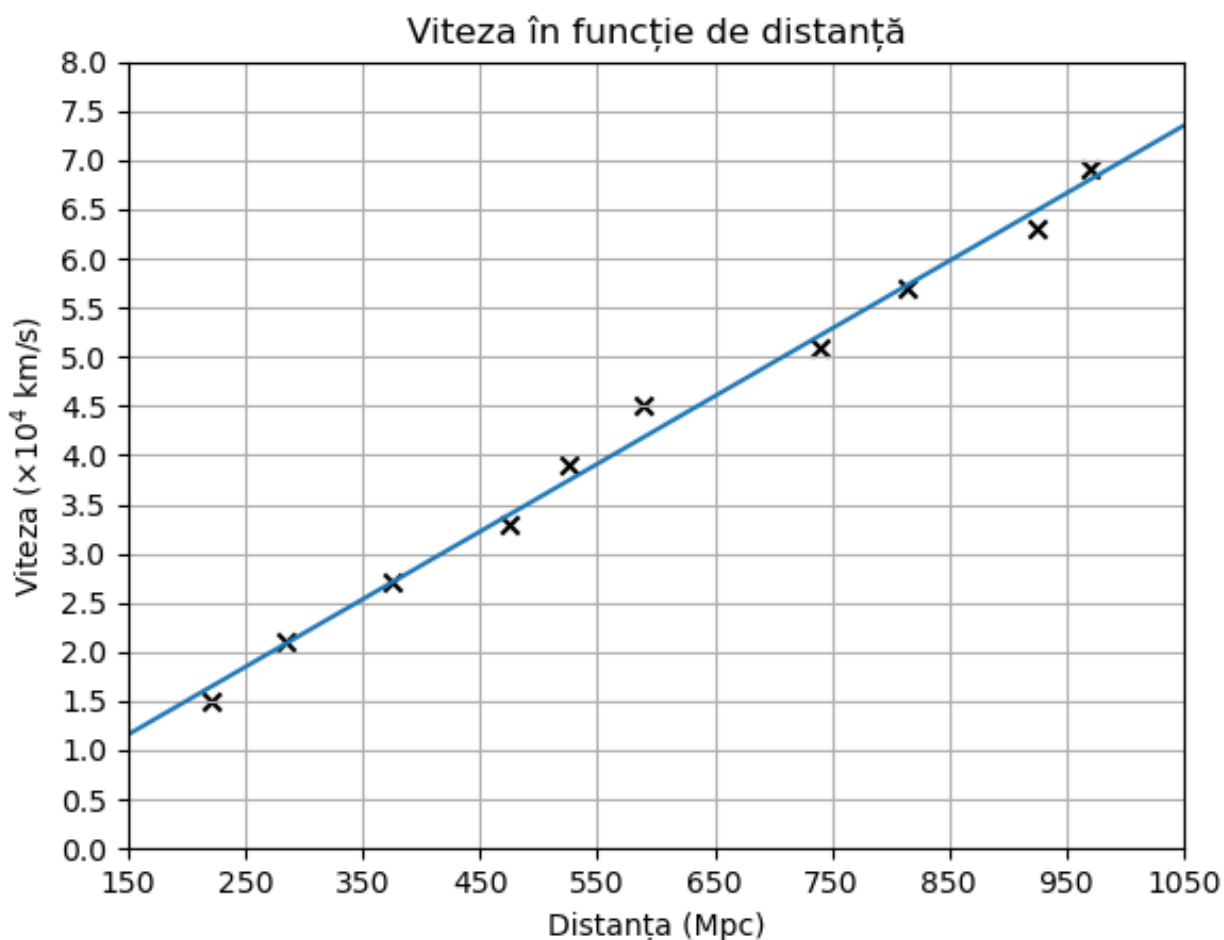
0,5p împărțire rezonabilă a axei OY prin marcaje și valori numerice

Este o dependență liniară:

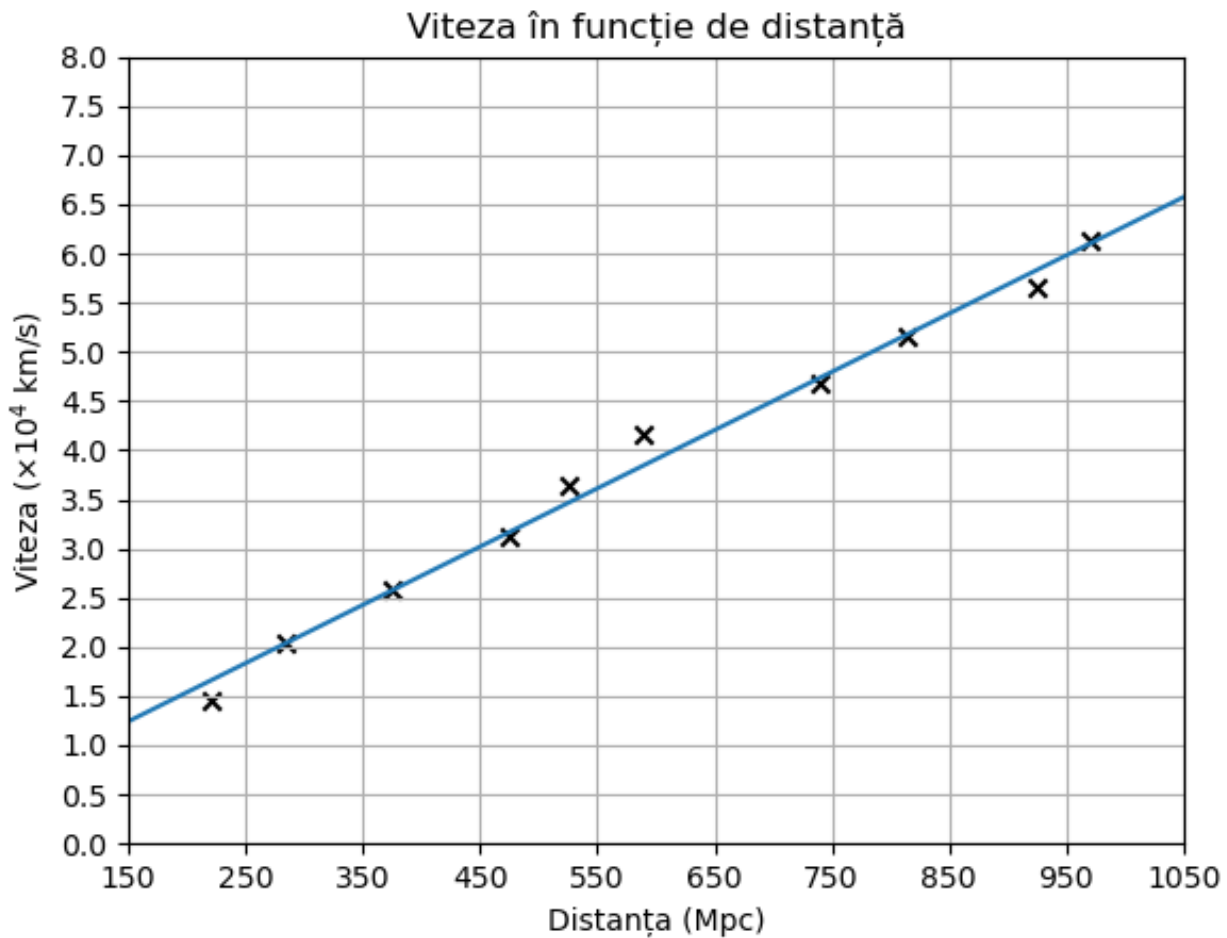
$$v = a \times d + b$$

2p identificarea dependenței liniare (în cuvinte sau formulă, ambele se punctează)

2p trasarea dreptei printre puncte, în mod rezonabil



Relativist



e) [13 p] Din metoda celor mai mici pătrate se găsesc valorile:

$$a = 68,777 \text{ km/s/Mpc} \approx 69 \text{ km/s/Mpc} \quad \mathbf{4p}$$

$$b = 0.12834 \times 10^4 \text{ km/s} \approx 0,13 \times 10^4 \text{ km/s} \quad \mathbf{4p}$$

Punctaj maxim pentru a între 68 și 70 km/s/Mpc.

Punctaj maxim pentru b între 0,06 și $0,2 \times 10^4$ km/s.

Jumătate din punctaj se acordă rezolvărilor prin estimarea pantei și intersecției direct pe grafic (**4p** în total în loc de **8p**).

Relativist

Din metoda celor mai mici pătrate se găsesc valorile:

$$a = 59,241 \text{ km/s/Mpc} \approx 59 \text{ km/s/Mpc} \quad \mathbf{4p}$$

$$b = 0.3529 \times 10^4 \text{ km/s} \approx 0,35 \times 10^4 \text{ km/s} \quad \mathbf{4p}$$

Punctaj maxim pentru a între 58 și 60 km/s/Mpc.

Punctaj maxim pentru b între 0,28 și $0,42 \times 10^4$ km/s.

Jumătate din punctaj se acordă rezolvărilor prin estimarea pantei și intersecției direct pe grafic (**4p** în total în loc de **8p**).

Însemnătatea fizică pentru a este celebra constantă a lui Hubble H_0 , care caracterizează expansiunea universului. **2,5p**



Însemnătatea fizică pentru b are legătură cu calitatea datelor și prelucrarea lor. Din considerente teoretice, $b = 0$. Datorită erorilor instrumentale la obținerea spectrelor, la determinarea distanțelor, erorilor de rotunjire pentru calcule intermediare, etc. valoarea lui b este diferită de 0. **2,5p**