Subiectul I Test grilă, complement simplu (3p x 10 itemi=30 puncte)

Barem grilă

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	**b**	**c**	**d**	**a**	**b**	**c**	**b**	**c**	**c**

Subiectul II Probleme (40 puncte)

Problema 1 Sistemul planetar (20 puncte)

În majoritatea sistemelor planetare cunoscute, planetele se rotesc în același sens cu steaua centrală (mișcare progradă). Totuși, considerăm un sistem ipotetic format dintr-o stea centrală de masă $M = 1,4\,M_\odot$ și trei planete ale căror orbite sunt coplanare. Planeta a doua (P_2) servește drept bază pentru un observator situat pe această planetă.

Datele sistemului sunt următoarele:

- Planeta P_1: mișcare retrogradă ($a_1 = 0,5\,\text{UA}$, $e_1 = 0,02$);
- Planeta P_2: mișcare progradă ($a_2 = 1,2\,\text{UA}$, $e_2 = 0,0$);
- Planeta P_3: mișcare progradă ($a_3 = 2,5\,\text{UA}$, $e_3 = 0,04$).

Presupunând momentan că toate planetele se mișcă pe orbite circulare.

a) [**3 p**] Calculați perioadele de revoluție siderale ale celor trei planete (T_1, T_2, T_3) în ani tereștri și perioadele sinodice ale planetelor P_1 și P_3 raportate la observatorul de pe P_2.

b) [**4 p**] Determinați intervalul de timp necesar planetei P_1 pentru a trece de la poziția de elongație estică maximă la poziția de conjuncție inferioară.

c) [**4 p**] Calculați intervalul de timp în care planeta P_3 se deplasează de la opoziție la prima sa cuadratură vestică.

Ținând cont de valorile excentricităților menționate în datele inițiale,

d) [**5 p**] Determinați intervalul (valorile minimă și maximă) al unghiului de elongație maximă (ε_{max}) sub care este văzută planeta P_1 de către observatorul de pe P_2.

e) [**4 p**] Calculați viteza relativă maximă și minimă (v_{rel}) a planetei P_1 față de planeta P_2 în momentele în care acestea se află în conjuncție inferioară.

Barem - Sistemul planetar (20 puncte)

a) [**3 p**] Din Legea a III-a a lui Kepler generalizată: $T = \sqrt{a^3/M}$ (în ani și UA) (**0,5 p**).
$T_1 = \sqrt{0,5^3/1,4} = \sqrt{0,125/1,4} \approx 0,2988$ ani; (**0,5 p**)
$T_2 = \sqrt{1,2^3/1,4} = \sqrt{1,728/1,4} \approx 1,111$ ani; (**0,5 p**)
$T_3 = \sqrt{2,5^3/1,4} = \sqrt{15,625/1,4} \approx 3,341$ ani. (**0,5 p**)
Perioade sinodice (P_1 retrogradă, P_3 progradă, raportate la P_2 progradă):
$S_{12} = \frac{T_1T_2}{T_1+T_2} \approx 0,235$ ani; (**0,5 p**)
$S_{23} = \frac{T_2T_3}{T_3-T_2} \approx 1,664$ ani. (**0,5 p**)

b) [**4 p**] La elongație maximă, triunghiul format de stea, P_1 și P_2 este dreptunghic în P_1. Unghiul de elongație observat este:
$\sin\alpha = \frac{a_1}{a_2} = \frac{0,5}{1,2} \implies \alpha \approx 24,62°$.
Unghiul heliocentric dintre razele spre P_1 și P_2 este $\beta = 90° - \alpha \approx 65,38°$. (**2 p**)
Deoarece P_1 este retrogradă, se mișcă ”în întâmpinarea” lui P_2. Timpul scurs până la conjuncția inferioară este calculat din unghiul heliocentric parcurs relativ:
$\Delta t = \frac{\beta}{360°}S_{12} \approx \frac{65,38}{360} \cdot 0,235 \approx 0,0427$ ani $\approx 15,6$ zile. (**2 p**)

c) [**4 p**] La cuadratură, unghiul $P_2 - P_3 -$ Stea este de 90°. Fie β unghiul la stea.
$\cos\beta = \frac{a_2}{a_3} = \frac{1,2}{2,5} = 0,48 \implies \beta \approx 61,31°$. (**2 p**)
Timpul scurs: $\Delta t = \frac{\beta}{360°}S_{23} \approx \frac{61,31}{360} \cdot 1,664 \approx 0,283$ ani $\approx 103,5$ zile. (**2 p**)

Ținând cont de valorile excentricităților menționate în datele inițiale:

d) [**5 p**] Distanța r_1 variază între periastru și apoastru:
$r_{1,min} = a_1(1-e_1) = 0,5(1-0,02) = 0,49$ UA.
$r_{1,max} = a_1(1+e_1) = 0,5(1+0,02) = 0,51$ UA. (**2 p**)
$\sin\varepsilon_{min} = \frac{r_{1,min}}{r_2} = \frac{0,49}{1,2} \approx 0,4083 \implies \varepsilon_{min} \approx 24,1°$. (**1,5 p**)
$\sin\varepsilon_{max} = \frac{r_{1,max}}{r_2} = \frac{0,51}{1,2} \approx 0,425 \implies \varepsilon_{max} \approx 25,15°$. (**1,5 p**)

e) [**4 p**] Pentru valorile extreme se presupune că momentul conjuncției inferioare poate coincide cu periastrul, respectiv cu apoastrul orbitei lui P_1. La conjuncție inferioară (sensuri opuse ale mișcării pe orbită), vitezele se însumează vectorial: $v_{rel} = v_1 + v_2$.
$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{a_2}} \approx 29,78\sqrt{\frac{1,4}{1,2}} \approx 32,17$ km/s. (**1 p**)
Viteza maximă a lui P_1 (la periastru):
$v_{1,max} = \sqrt{\frac{GM(1+e_1)}{a_1(1-e_1)}} \approx 29,78\sqrt{\frac{1,4 \cdot 1,02}{0,5 \cdot 0,98}} \approx 50,88$ km/s. (**1 p**)
Viteza minimă a lui P_1 (la apoastru):
$v_{1,min} = \sqrt{\frac{GM(1-e_1)}{a_1(1+e_1)}} \approx 29,78\sqrt{\frac{1,4 \cdot 0,98}{0,5 \cdot 1,02}} \approx 48,88$ km/s. (**1 p**)
$v_{rel,max} = v_{1,max} + v_2 \approx 83,05$ km/s;
$v_{rel,min} = v_{1,min} + v_2 \approx 81,05$ km/s. (**1 p**)

Problema 2 Arcturus (20 puncte)

Într-un anumit loc de pe Pământ, timpul în care steaua Arcturus ($\alpha = 14^h16^m, \delta = 19°11'$) se află sub planul orizontului matematic este egal cu o treime dintr-o zi siderală. Pentru punctele a) și b) se va considera orizontul matematic, fără refracție atmosferică.

a) [4 p] Care este latitudinea geografică a locului de observare?

b) [4 p] Cum se vor schimba condițiile de observare ale stelei Arcturus pentru un astronom aflat de două ori mai aproape de ecuator?

c) [4 p] Pe parcursul unui an, între ce valori variază raportul dintre durata zilei și durata nopții în locul determinat la punctul a)?

d) [4 p] Care este durata maximă de observare vizuală a stelei Arcturus de către astronomul amator pe parcursul unui an? Se consideră crepusculul nautic, adică limita $z = 96°$ pentru centrul Soarelui.

e) [4 p] În ce perioadă (zi, lună) este posibil acest lucru?

Barem - Arcturus (20 puncte)

a) [4 p] Timpul în care steaua se află sub orizontul matematic este o treime dintr-o zi siderală (8^h), deci timpul petrecut deasupra orizontului matematic este 16^h. Semiarcul diurn este $t = 120°$. Pentru acest punct se neglijează refracția atmosferică. **(2 p)**
Latitudinea locului de observare se deduce din condiția geometrică de răsărit/apus:
$\varphi = \arctan\left(-\frac{\cos t}{\tan\delta}\right) = \arctan\left(-\frac{\cos 120°}{\tan 19°11'}\right) = 55°10'$. **(2 p)**

b) [4 p] Noua latitudine la care se mută astronomul este $\frac{\varphi}{2} = 27°35'$. **(1 p)**
Timpul în care Arcturus se află sub orizont va fi de N ori mai mic decât ziua siderală, unde N se calculează cu ajutorul noului unghi orar de apus: **(1 p)**
$N = \frac{180°}{180° - \arccos\left(-\tan\delta \cdot \tan\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{180°}{180° - \arccos\left(-\tan 19°11' \cdot \tan\frac{55°10'}{2}\right)}$. **(1 p)**
$N \approx 2,26$ ori. **(1 p)**

c) [4 p] Pe parcursul anului, raportul zi/noapte variază între extremele atinse la solstiții. Se folosește distanța zenitală a centrului Soarelui la apus $z_s = 90°51'$ (include refracția de $35'$ și raza aparentă a Soarelui de $16'$). Declinația Soarelui la solstiții este $\delta_{1,2} = \pm 23°26'$. **(1 p)**
Unghiurile orare de apus ale Soarelui în zilele de solstițiu sunt:
$t_{s1} = \arccos\left(\frac{\cos z_s - \sin\varphi\sin\delta_1}{\cos\varphi\cos\delta_1}\right) = \arccos\left(\frac{\cos 90°51' - \sin 55°10' \sin 23°26'}{\cos 55°10' \cos 23°26'}\right) \approx 8,709^h$. **(1 p)**
$t_{s2} = \arccos\left(\frac{\cos z_s - \sin\varphi\sin\delta_2}{\cos\varphi\cos\delta_2}\right) = \arccos\left(\frac{\cos 90°51' + \sin 55°10' \sin 23°26'}{\cos 55°10' \cos 23°26'}\right) \approx 3,568^h$. **(1 p)**
Raportul duratelor zi/noapte va fi situat în intervalul $[N_2, N_1]$:
$N_1 = \frac{2 \cdot t_{s1}}{24^h - 2 \cdot t_{s1}} = 2,646$ și $N_2 = \frac{2 \cdot t_{s2}}{24^h - 2 \cdot t_{s2}} = 0,423$. Răspuns final: $N \in [0,423; 2,646]$. **(1 p)**

d) [4 p] Durata maximă de observare vizuală se înregistrează în noaptea opoziției dintre Arcturus și Soare. **(1 p)**
Coordonatele Soarelui la acel moment: $\alpha_s = 2^h16^m, \delta_s = 13°38'$. **(1 p)**
Vizibilitatea este limitată de durata nopții (de la sfârșitul crepusculului de seară până la începutul celui de dimineață). Considerând distanța zenitală $z = 96°$,

timpul τ este: **(1 p)**

$\tau = 24^h - 2 \cdot \arccos\left(\frac{\cos 96^\circ - \sin\delta_s \sin\varphi}{\cos\delta_s \cos\varphi}\right) = 7^h 40^m$.

Deoarece $7^h 40^m$ este mai puțin decât timpul total deasupra orizontului (16^h), durata de observare vizuală pe un cer întunecat este limitată strict de crepuscul la $\Delta\tau = 7^h 40^m$. **(1 p)**

e) [**4 p**] Momentul corespunzător opoziției, când ascensia dreaptă a Soarelui este $\alpha_s = 2^h 16^m$, are loc primăvara. **(2 p)**
Răspuns: Data este **26 aprilie**, plus/minus o zi. **(2 p)**

Subiectul III Analiză de date (20 puncte)

Problema 1 Analiza a două Cefeide (20 puncte)

Cefeidele sunt stele variabile, a căror luminozitate și magnitudine se schimbă periodic. În graficul de mai jos se dă curba de lumină a unei Cefeide (magnitudinea aparentă vizuală vs. timp), pe care o vom numi Cefeida A.

a) [**1,5 p**] Determinați din grafic perioada de variabilitate a Cefeidei A.

b) [**1,5 p**] Care este magnitudinea aparentă vizuală medie a Cefeidei A? Indiciu: calculați magnitudinea aparentă vizuală medie ca suma dintre magnitudinea aparentă vizuală maximă și magnitudinea aparentă vizuală minimă, împărțită la 2.

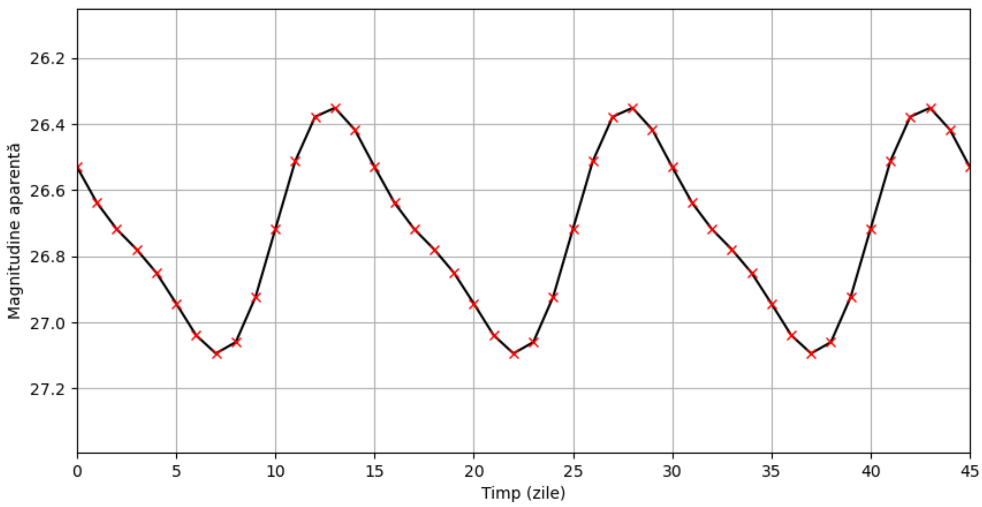


Figure 1: Curba de lumină a Cefeidei A.

Pentru o a doua cefeidă, numită mai departe Cefeida B, se dă tabelul de mai jos, unde sunt trecute valorile magnitudinii aparente vizuale ca funcție de timp.

c) [**9 p**] Realizați graficul curbei de lumină pentru Cefeida B, pe hârtia milimetrică pusă la dispoziție (magnitudinea aparentă vizuală vs. timp). Această foaie va fi predată împreună cu rezolvarea.

Timp (zile)	**Magnitudine aparentă (^{m})**
0	24.00
1	24.18
2	24.36
3	24.52
4	24.63
5	24.61
6	24.45
7	24.17
8	23.90
9	23.83
10	24.00
11	24.18
12	24.36
13	24.52
14	24.63
15	24.61
16	24.45
17	24.17
18	23.90
19	23.83
20	24.00
21	24.18
22	24.36
23	24.52
24	24.63
25	24.61
26	24.45
27	24.17
28	23.90
29	23.83

Table 1: Magnitudinea aparentă în funcție de timp pentru Cefeida B.

d) **[1,5 p]** Care este perioada de variabilitate a Cefeidei B?

e) **[1,5 p]** Care este magnitudinea aparentă vizuală medie a Cefeidei B?

Pentru stele variabile de tip Cefeide, există o relație între magnitudinea absolută vizuală medie $M_{V medie}$ a stelei și perioada de variabilitate P exprimată în zile:

$$M_{V medie} = a \times log_{10}(P) + b$$

Această relație a fost descoperită de Henrietta Swan Leavitt în anii 1910-1920 la Universitatea Harvard. Știind că Cefeida A se află la distanța de 20 Mpc față de Pământ și Cefeida B se află la distanța de 5 Mpc față de Pământ, determinați:

f) **[2,5 p]** Magnitudinile vizuale absolute medii pentru cele două Cefeide.

g) **[2,5 p]** Valorile coeficienților a și b din relația de mai sus.

Barem - Analiză a două Cefeide (20 puncte)

a) **[1,5 p]** Măsurarea dintre două maxime consecutive sau dintre două minime consecutive rezultă în determinarea perioadei:

$$P_A = 15\ zile\ \textbf{[1,5 p]}$$

b) **[1,5 p]** Din grafic:

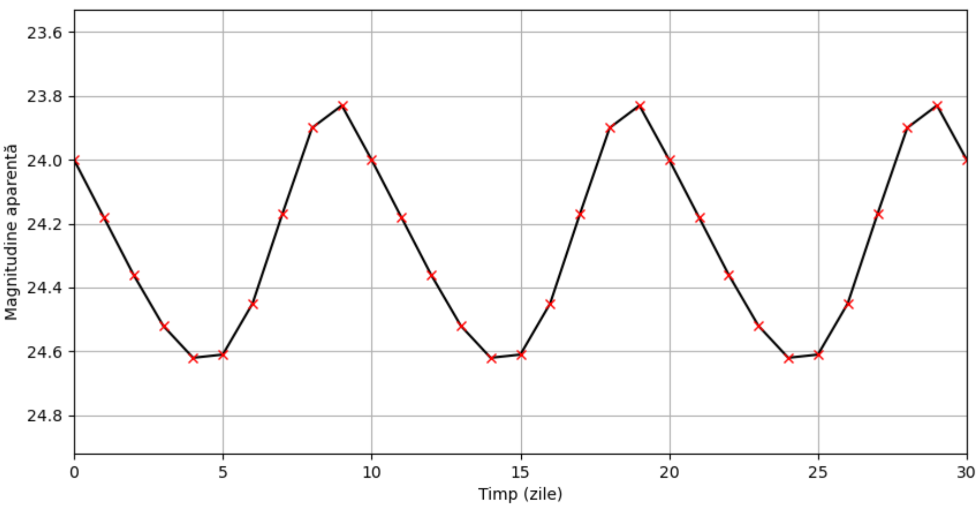
$$m_{VmaxA} = 27,1^m\ \textbf{[0,5 p]}$$

$$m_{VminA} = 26,36^m\ \textbf{[0,5 p]}$$

$$m_{VmedieA} = \frac{m_{VmaxA} + m_{VminA}}{2} = \frac{27,1 + 26,36}{2} = 26,73^m\ \textbf{[0,5 p]}$$

Se acceptă răspunsuri în marja $\pm 0,03$.

c) **[9 p]** Graficul:



Se punctează:

- 30 puncte pe grafic - 0,2p fiecare =**[6 p]**
- marcarea corespunzătoare a axelor (mărime și unitate de măsură, unde este necesar) - **[1 p]**
- Alegerea scalei potrivite pentru realizarea desenului (de exemplu, doar magnitudinile de interes sunt prezentate, timpul se oprește la o valoare rezonabilă etc.) - **[1 p]**
- Linia trasată bine printre puncte - **[1 p]**
- Magnitudinea poate fi orientată ca în graficul din problemă (mare jos, mică sus) sau invers (mare sus, mică jos); ambele variante se punctează maxim.

d) **[1,5 p]** De pe grafic (sau din tabel), perioada Cefeidei B se măsoară ca distanța dintre două maxime consecutive sau dintre două minime consecutive:

$$P_B = 10\ zile\ \textbf{[1,5 p]}$$

e) [**1,5 p**] Din tabel:

$$m_{VmaxB} = 24,63^m \ \textbf{[0,5 p]}$$

$$m_{VminB} = 23,83^m \ \textbf{[0,5 p]}$$

$$m_{VmedieB} = \frac{m_{VmaxB} + m_{VminB}}{2} = \frac{24,63 + 23,83}{2} = 24,23^m \ \textbf{[0,5 p]}$$

Valorile exacte fiind date în tabel, nu se acceptă marjă de eroare.

f) [**2,5 p**] Știind distanțele până la cele două Cefeide, putem să calculăm magnitudinea absolută vizuală medie M_{Vmedie} pentru cele două stele din magnitudinile aparente vizuale medii:

$$M_{VmedieA} - m_{VmedieA} = -2,5 \times log_{10}\left(\frac{L_A}{4\pi(10pc)^2} \times \frac{4\pi d_A^2}{L_A}\right)$$

$$M_{VmedieA} - m_{VmedieA} = -5 \times log_{10}\left(\frac{d_A}{10pc}\right)$$

$$M_{VmedieA} = m_{VmedieA} - 5 \times log_{10}\left(\frac{d_A}{10pc}\right)$$

și

$$M_{VmedieB} = m_{VmedieB} - 5 \times log_{10}\left(\frac{d_B}{10pc}\right) \ \textbf{[0,5 p]} \ formula$$

Numeric:

$$M_{VmedieA} = 26,73 - 5 \times log_{10}\left(\frac{20 \times 10^6 pc}{10pc}\right)$$

$$M_{VmedieA} = -4,77515^m \quad \textbf{[0,5 p]}$$

Valoarea rotunjită cu numărul corect de zecimale:

$$M_{VmedieA} \approx -4,78 \quad \textbf{[0,5 p]}$$

Marja de eroare acceptată este de $\pm 0,03$.

$$M_{VmedieB} = 24,23 - 5 \times log_{10}\left(\frac{5 \times 10^6 pc}{10pc}\right)$$

$$M_{VmedieB} = -4,26485^m \quad \textbf{[0,5 p]}$$

Valoarea rotunjită cu numărul corect de zecimale:

$$M_{VmedieA} \approx -4,26 \quad \textbf{[0,5 p]}$$

Marja de eroare acceptată este de $\pm 0,03$.

g) [**2,5 p**] Acum avem 2 ecuații cu două necunoscute, de unde putem să aflăm coeficienții a și b:

$$M_{VmedieA} = a \times log_{10}(P_A) + b$$

$$M_{VmedieB} = a \times log_{10}(P_B) + b$$

Diferența lor:

$$M_{VmedieA} - M_{VmedieB} = a(log_{10}(P_A) - log_{10}(P_B))$$

$$a = \frac{M_{VmedieA} - M_{VmedieB}}{log_{10}(P_A) - log_{10}(P_B)} \quad \textbf{[0,5 p]}$$

$$a = \frac{-4,77515 + 4,26485}{log_{10}(15) - log_{10}(10)}$$

$$a = -2,8979 \quad \textbf{[0,5 p]}$$

Rotunjirea la numărul corect de cifre semnificative:

$$a \approx -2,90 \quad \textbf{[0,5 p]}$$

Marjă de $\pm 0,3$.

$$b = M_{VmedieA} - a \times log_{10}(P_A)$$

$$b = -4,77515 + 2,9 \times log_{10}(15)$$

$$b = -1,3644^m \quad \textbf{[0,5 p]}$$

Rotunjirea la numărul corect de cifre semnificative:

$$b \approx -1,36^m \quad \textbf{[0,5 p]}$$

Marjă de $\pm 0,3^m$.