АСТРОНОМИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

EURO–ASIAN ASTRONOMICAL SOCIETY

Round | **Theo**

Group | **α** | **β**

XXI Международная астрономическая олимпиада

XXI International Astronomy Olympiad

Болгария, Пампорово-Смолян 5 – 13. X. 2016 Pamporovo-Smolyan, Bulgaria

язык / language | **Русский**

Теоретический тур. Предварительные решения. <u>Только для работы жюри</u>

Note. The given sketches are not full; the team leaders have to give more detailed explanations to students. But the correct solutions in the students' papers (enough for 8 pts) may be shorter.

Note. Jury members should evaluate the student's solutions in essence, and not by looking on formal existence the mentioned sentences or formulae. The formal presence of the mentioned positions in the text is not necessary to give the respective points. Points should be done if the following steps de facto using these positions.

α-1. Спутник Марса. Найдём расстояние A, на котором должен быть спутник, чтобы с него наблюдалось затмение Марсом Солнца «как на Земле». Пусть R – радиус Солнца, r – радиус Марса, L – расстояние от Солнца до Марса. Из равенства угловых размеров:

$$r/A = R/(L+A), \quad A = L\cdot r/(R-r) \approx Lr/R = Ld/D \quad (\text{т.к. } d << D).$$

Для среднего расстояния от Солнца до Марса 1,524 а.е.

$$A = 1{,}524\cdot 149{,}6 \text{ млн.км.} \times 6794 \text{ км} / 1392000 \text{ км} \;\; 1{,}11 \text{ млн.км.}$$

Далее главная идея задачи заключается в том, что сравнить это расстояние с размером сферы Хилла, иными словами, с расстоянием от Марса до первой точки Лагранжа. Вычисление положения точек Лагранжа в общем виде довольно сложно, но для случая Марса и Солнца можно работать в приближении $M_M << M_S$.

$$GM_S/(R+\Lambda)^2 + GM_M/\Lambda^2 = \omega^2(R+\Lambda),$$

при этом, из условия движения Марса по орбите $GM_S/R^2 = \omega^2 R$ получаем $\omega^2 = GM_S/R^3$,

$$M_S/(R+\Lambda)^2 + M_M/\Lambda^2 = M_S(R+\Lambda)/R^3.$$

Решая это уравнение в приближении $M_M << M_S$, $\Lambda << R$, получаем, что вторая точка Лагранжа находится от Марса на расстоянии

$$\Lambda = (M_M/3M_S)^{1/3} = 1{,}08 \text{ млн.км.}$$

Таким обазом, $A > \Lambda$.

Орбита спутника должна была бы быть вне сферы Хилла. Марс неминуемо потеряет такой спутник.

Рисунок, которым необходимо сопроводить решение, должен описывать необходимое для затмения положение спутника и сферу Хилла или точки Лагранжа.

Ответ: «**ситуация невозможна**».

Тем не менее, можно найти гипотетический период обращения спутника вокруг Марса по орбите радиуса A.

$$T = 2\pi(A^3/GM_M)^{1/2} = 3{,}6\cdot 10^7 \text{ с} \approx 415 \text{ суток.}$$

Это 415/687 = 0,6 орбитального периода Марса, что превышает критический коэффициент $1/3^{1/2}$: вокруг планет не существует орбит, период обращения которых превышает $1/3^{1/2}$ периода обращения самой планеты вокруг звезды.

β-1. Сфера Дайсона. Как известно, период обращения планеты по круговой орбите вокруг звезды зависит только от массы звезды. Поэтому совершенно не важно, какой размер изначально имела звезда. Выведем формулу для нахождения этого периода для крайнего случая, когда радиус орбиты равен радиусу звезды R:

$$\tau = 2\pi / \omega, \quad \omega^2 \cdot R = GM/R^2, \quad \omega^2 = GM/R^3 = 4/3\ \pi\ G\rho, \quad \tau = (3\pi/G\rho)^{1/2}.$$

Таким образом, период зависит только от плотности шара, непосредственно вдоль поверхности которого происходит круговое движение, а в нашем случае – от плотности нынешней Бетльгейзе.

Все необходимые данные берём из таблиц.
Бетельгейзе имеет звёздную величину $0{,}5^m$ и находится от нас на расстоянии

$$D_B = 206265 \text{ а.е./пк} \times 197 \text{ пк} \approx 40\,600\,000 \text{ а.е.}$$

При удалении на такое расстояние Солнце имело бы звёздную величину

$$\mathbf{m_1} = -26{,}74^m + 5^m \lg 40\,600\,000 \approx -26{,}74^m + 38{,}04^m \approx 11{,}30^m.$$

Таким образом, разница абсолютных звёздных величин Солнца и Бетельгейзе составит

$$\Delta\mathbf{m} = 11{,}3^m - 0{,}5^m = 10{,}8^m.$$

Это значит, что светимость Бетельгейзе L_B больше светимости Солнца L_0 в

$$L_B / L_0 = 100^{10{,}8/5} \approx 21000 \text{ раз.}$$

Светимость звезды L пропорциональна площади её поверхности и четвёртой степени температуры поверхности, то есть, $L \sim R^2T^4$. Плотность звезды равна её массе, делённой на объём, то есть, пропорциональна M/R^3. Таким образом, $\rho \sim MT^6/L^{3/2}$. Соотношение масс Бетельгейзе и Солнца, их температуры можно найти из таблицы звёзд, 11,6, 3590 K и 5777 K соответственно. Сравнивая плотности Бетельгейзеа и Солнца (из таблицы Слнечной Системы $\rho_0 \approx 1410$ кг/м^3), получаем плотность Бетельгейзе

$$\rho_B = \rho_0 \cdot (M_B/M_0) \cdot (T_B/T_0)^6 \cdot (L_B/L_0)^{-3/2} \approx 3{,}1 \cdot 10^{-4} \text{ кг/м}^3.$$

В нашем случае

$$\tau = (3\pi/G)^{1/2} \cdot \rho_0^{-1/2} \cdot (M_B/M_0)^{-1/2} \cdot (T_B/T_0)^{-3} \cdot (L_B/L_0)^{3/4} \approx 2{,}13 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 247 \text{ сут.}$$

Однако, задача оценочная, поэтому точность возможна не более чем в две значащие цифры в ответе неуместна, правильный ответ: **около 250 суток**.

α-2. Продолжительность суток. Если единственной причиной субдекадных вариаций являются колебания уровня мирового океана, то физической причиной этого является закон сохранения момента импульса:

$$L = \text{const}.$$

Для начала можно решить задачу качественно. Учитывая, что момент импульса является произведением момента инерции системы на угловую скорость $L = I\omega$, а момент инерции тем больше, чем «шире» система (чем больше массы находится дальше от оси вращения), можно сделать вывод, что с повышением уровня мирового океана (из-за перемещения тающего льда с приполярных областей на всю поверхность океана) момент инерции Земли увеличивается. Соответственно при этом уменьшается частота вращения

Земли, то есть период вращения увеличивается. У нас на графике – наоборот, с 1995 по 2003 год продолжительность суток уменьшилась на 1,8 мс (наоборот, вода с поверхности мирового океана осела вблизи полюсов), соответственно сразу можно сделать вывод, что $\Delta h = -$...

Наша задача оценочная, поэтому мы сразу пренебрежём разницей между продолжительостью суток и периодом обращения вокруг своей оси и отличием формы Земли от шара.

Пусть M_0 – масса Земли без слоя приполярного льда, который потом растает. R – средний радиус Земли, ω – угловая скорость вращения Земли:

$$L_0 = I_0 \cdot \omega_0 = (2/5\ M_0 R^2 + I_{ice}) \cdot \omega_0$$

Через какое-то время, когда часть льда растает:

$$L_1 = I_1 \cdot \omega_1 = (2/5\ M_0 R^2 + 2/3\ \eta\rho S\Delta h(R+\Delta h/2)^2) \cdot \omega_1,$$

где S – площадь поверхности Земли, ρ – плотность воды, η – отношение поверхности океана к общей поверхности земного шара, таким образом $\eta\ \rho\ S\ \Delta h$ – это масса воды, поднявшей уровень океана на Δh.

$$L_1 \approx (2/5\ M_0 R^2 + 2\eta/3\ \rho\ 4\pi R^2 \Delta h R^2) \cdot \omega_1 \approx (2/5\ M_0 R^2 + 8\pi\eta/3\ \rho R^4 \Delta h) \cdot \omega_1,$$

Поскольку $L_0 = L_1$, $I_0 \cdot \omega_0 = I_1 \cdot \omega_1$,

$$(2/5\ M_0 R^2 + I_{ice}) \cdot \omega_0 = (2/5\ M_0 R^2 + 8\pi\eta/3\ \rho R^4 \Delta h) \cdot \omega_1,$$

Поскольку приполярный лёд сосредоточен у полюсов, величина I_{ice} незначительна и мы ей также пренебрежём.

$$8\pi\eta/3\ \rho R^4 \Delta h \cdot 2\pi/T_1 = 2/5\ M_0 R^2\ (2\pi/T_0 - 2\pi/T_1) = 2/5\ M_0 R^2\ 2\pi(T_1 - T_0)/T_1 T_0$$

и, поскольку $T_1 \approx T_0 \approx T$,

$$8\pi\eta/3\ \rho R^4 \Delta h = 2/5\ M_0 R^2\ \Delta T/T.$$

$$\Delta h/\Delta T = 3/20\pi\eta\ M_0/T\rho R^2.$$

Взяв необходимые данные из таблиц, приняв η = 0,71 (величины от 2/3 до 3/4 считаются правильными) и взяв плотность солёной воды ρ = 1024 кг/м^3, получаем соотношение между отклонениями в уровне мирового океана и продолжительностью суток (без учёта влияния Луны):

$$\Delta h/\Delta T = 0{,}11\ \text{м/мс}.$$

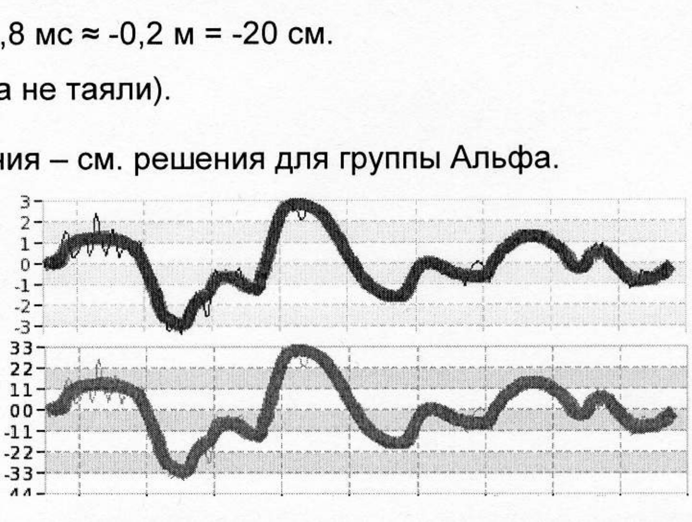
С 1995 по 2003 год продолжительность суток уменьшилась на 1,8 мс, поэтому

$$\Delta h = 0{,}11\ \text{м/мс} \times -1{,}8\ \text{мс} \approx -0{,}2\ \text{м} = -20\ \text{см}.$$

(Приполярные льды, наоборот, нарастали, а не таяли).

β-2. Продолжительность суток. Начало решения – см. решения для группы Альфа.

Для того, чтобы воспользоваться полученным выше коэффициентом $\Delta h/\Delta T = 0{,}11$ м/мс, нужно отделить суб-декадные колебания от «лунного тренда», надо вычесть из данного графика график прямой с наклоном 1,6 мс/век. Поскольку



требуется нарисовать примерный график, округляем кратковременные колебания. В результате получается график, изображённый справа верху. Теперь нужно всего лишь перерисовать этот график, изменив по оси y миллисекунды на сантиметры с коэффициентом 11 см/мс. Получается примерно такой график (по оси y – сантиметры).

αβ-3. Небесное предзнаменование. Две кометы. По III закону Кеплера можно вычислить большую полуось орбиты комет. Если периоды мы измеряем в годах, а расстояния в астрономических единицах, то для орбит вокруг Солнца закон записывается как:

$$T^2 / a^3 = 1.$$

В нашем случае T = 3 года, $a = 3^{2/3} = 2{,}08$ а.е. Будем считать, что середина пояса астероидов, которой достигают кометы в афелии, – это окружность с радиусом равным среднему расстоянию от Цереры до Солнца, A = 2,8 а.е. Тогда в перигелии они находятся от Солнца на расстоянии P = 2a – A = 1,36 а.е. Поскольку плоскость пояса астероидов находится примерно в плоскости эклиптики, означает, что и кометы проходят и афелий, и перигелий также примерно в плоскости эклиптики. Также очевидно, что если период обращения комет составляет три года, то будучи в афелии в противостоянии, они и в перигелии также окажутся в противостоянии, совершив полуоборота вокруг Солнца, в то время как Земля совершит полтора оборота.

То, что кометы летят по одной и той же траектории означает, что одно из них в точности повторяет положения другого через некоторый постоянный интервал времени. Соответственно, расстояние L между ними пропорционально их скорости. По II закону Кеплера для положений афелия и перигелия $V_A \cdot A = V_P \cdot P$. Таким образом

$$L_A \cdot A = L_P \cdot P.$$

Во время противостояний угловые расстояния, видимые с Земли:

$$\alpha = L_A / (A–1) \text{ (афелий)},$$

$$\beta = L_P / (P–1) \text{ (перигелий)}.$$

Если при наблюдении в афелии для невооружённого глаза кометы сливаются в одну видимую точку, значит, они находятся друг от друга на угловом расстоянии меньшем, чем разрешающая способность глаза. Примем, что разрешающая способность глаза равна δ = 1'. Таким образом, α < δ,

$$\beta = L_P / (P–1) = L_A \cdot (A/P) / (P–1) = \alpha \cdot (A/P) \cdot (A–1) / (P–1) \approx 10{,}3\,\alpha < 10{,}3\,\delta \approx 10'.$$

Таким образом, две кометы вполне могли быть на угловом расстоянии в треть диаметра Луны и тем самым поразить воинов.

αβ-4. Небесное предзнаменование. Луна и комета. Адрианополь находится в северном полушарии, все рассуждения и направления приведены для северного полушария.

4.1. Луна по орбите движется справа налево относительно звёзд и планет. Значит, комета может выходить из-за освещённой части Луны только тогда, когда освещена её правая часть, то есть, при растущей Луне, а значит – вечером

4.2. Если мы говорим о тонком серпике Луны, сравнимом по яркости с кометой, то возраст Луны – максимум 2,5 суток. Значит Луна находится левее Солнца на расстоянии не более, чем 30°. В период 15-дневного стояния с 7 по 22 июня Солнце находится в созвездии Тельца, а Луна, соответственно – в созвездии Близнецов.

4.3. Предзнаменование произошло на заходе Солнца. Луна в этом случае была на западе или даже северо-западе, поскольку дело происходит в середине лета. Таким образом, византийская армия видела это явление впереди, а болгарская – сзади. Далее рассуждения могут быть различными. В летописях чаще описываются ситуации, когда армия, видя впереди нехороший символ, разворачивалась отступала. По этой логике напуганными должны были быть греки. Но кто-то может предположить, что больше было напуганы болгарские воины, поскольку это им «нож в спину».

4.4. Художественный рисунок.

4.5. В качестве реперной временной точки возьмём вечер 3 октября 2016 года в Пампорово, когда на небе был виден очень тонкий серпик растущей Луны. Посчитаем, сколько дней прошло с 22 июня 813 года по 3 октября 2016 года.

$$N = (2016–813)*365 +]2016\text{-}813[/4 – 9 +103 = 439490.$$

Найдём, сколько лунных месяцев прошло за это время. Для это надо это число дней разделить на синодический период Луны. Мы помним, что он примерно равен 29,5 суткам, немного точнее – 29,53 суток.

$$439490 / 29{,}53 = 14882{,}83,$$

по дробной части этого числа мы можем узнать разность фаз Луны и получить, что такая же фаза была 17 июня 613 г. Однако это грубая ошибка. Если мы берём синодический период Луны равным 29,53 суток, то погрешность составляет 0,005 суток на один лунный месяц. Умножив число прошедших месяцев на эту погрешнось, получаем общую погрешнось в 14883 × 0,005 = 74 суток. Таким образом, такой серпик был виден 16 июня плюс-минус 74 дня.

Для получения ответа с точностью хотя бы один день, мы должны уменьшить погрешность синодического периода хотя бы на два порядка, то есть, использовать значение с ещё хотя бы двумя значащими цифрами.

Это возможно. В таблицах у нас есть период обращения Луны с шестью значащими цифрами и длина сидерического года с восемью значащими цифрами. Используя эти данные можно найти синодический период Луны с шестью значащими цифрами:

$$T = T_2T_1/(T_2–T_1) = 365{,}25636 \times 27{,}3217 / (365{,}25636 – 27{,}3217) = 29{,}5306.$$

С учётом этой точности

$$439490 / 29{,}5306 = 14882{,}47,$$

по дробной части этого числа мы понимаем, что 22 июня фаза Луны была близка к полнолунию, а описанный серпик мог быть виден за 13,9 суток (плюс-минус ¾ суток) до 22 июня. То есть, получается, что явление наблюдалось на небе 7-9 июня, то есть, в самом начале стояния.

αβ-5. Поиски астероидов. Телескоп должен получать одинаковую интенсивность света от астероида из главного пояса размером D = 2,5 км и пока неизвестным астероидом пояса Койпера. Нужно учитывать следующие аспекты:

1. **R**. Расстояние от Солнца: 2,8 а.е. для астероидов из главного пояса и около 35-50 а.е. для астероидов из пояса Койпера. Интенсивность света, падающего на астероид, обратно пропорциональна квадрату этого расстояния.
2. **L**. Расстояние от наблюдателя (т.е. от Земли): 1,8 а.е. для астероидов главного пояса (во время противостояний) и около 35-50 а.е. для астероидов из пояса Койпера.

Интенсивность света, попадающего в телескоп, обратно пропорциональна квадрату этого расстояния.

3. **D**. Размер (диаметр) тела. Интенсивность света, отражённого телом, пропорциональна квадрату этого размера.

4. **α**. Альбедо. Физические характеристики (состав) объектов будем считать приблизительно соответствующими Церере и Макемаке (Эрида уже за поясом Койпера). Альбедо Цереры – примерно 0,09, Макемаке – 0,77. Интенсивность света, отражённого от тела пропорционально альбедо.

Поэтому $I \sim R^{-2} \cdot L^{-2} \cdot D^{2} \cdot \alpha$. И для $I_1 = I_2$ мы должны написать: $D_2/D_1 = (R_2/R_1) \cdot (L_2/L_1) \cdot (\alpha_1/\alpha_2)^{1/2}$

$$D_2 = 2\text{ км} \cdot 15 \cdot 23 \cdot (0,12)^{1/2} \approx 290\text{ км}.$$

Задача оценочная, точность даже в две значащие цифры в ответе неуместна,

Ответ: около **300 км**.